法国数学精品译丛

几 何

（第二卷）

欧氏空间、三角形、圆及球面

［法］M. 贝尔热 著

科 学 出 版 社

现代数学译丛

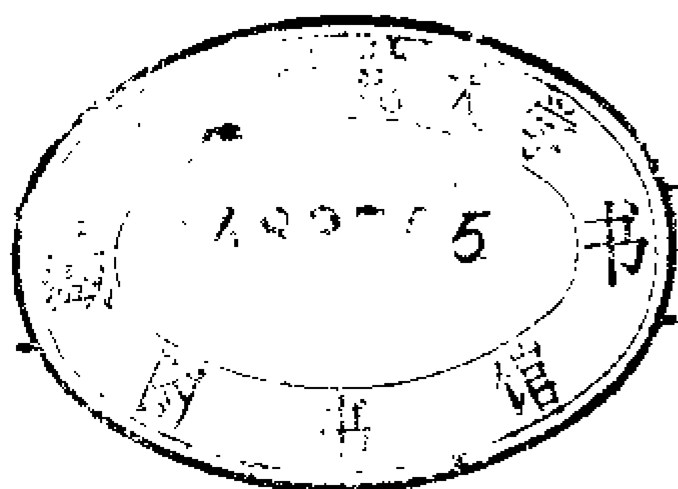
几　　何

（第二卷）

欧氏空间，三角形，圆及球面

〔法〕M. 贝尔热 著

周克希　陈志杰 译



科学出版社

1989

内容简介

《几何》是法国数学家 M. 贝尔热为大学生撰写的一套教学参考书。全书共分五卷，主要内容为：群在集合上的作用，仿射与射影空间；欧氏仿射空间；凸集与紧多面体；二次型，二次超曲面与圆锥曲线；球面与椭圆、双曲几何。本书配有大量的图和例，并有许多知识性的注释、按语和历史文献介绍。

本卷介绍欧氏空间，三角形，圆及球面。

本书可供高等院校数学系师生和有关的数学工作者参考。

M. Berger

GÉOMÉTRIE

2/Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères

CEDIC/Fernand Nathan, 1979, 2e édition

现代数学译丛

几　何

（第二卷）

欧氏空间，三角形，圆及球面

〔法〕M. 贝尔热 著

周克希　陈志杰 译

责任编辑　杜小杨

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1989年1月第一版　开本：850×1168 1/32

1989年1月第一次印刷　印张：7 1/4

印数：0001—1,360　字数：189,000

ISBN 7-03-000708-5/O・189

定价：7.60 元

目　　录

第 8 章　欧氏向量空间复习与补充 ······ 1

8.1　定义,初步性质 ······ 2

8.2　正交群：初步性质与讨论纲要 ······ 7

8.3　$\dim E = 2$ 时 $O(E)$ 的结构 ······ 13

8.4　$O(E)$ 中一个元素的结构. $O(E)$ 和 $O^+(E)$ 的生成元 ······ 17

8.5　$O(E)$ 的单性 ······ 23

8.6　直线或半直线的交角 ······ 25

8.7　平面上的定向角 ······ 29

8.8　相似;迷向锥面与迷向直线 ······ 42

8.9　四元数. 到 $O^+(3)$ 和 $O^+(4)$ 的映射 ······ 47

8.10　$O^+(n)$ 与代数拓扑 ······ 53

8.11　定向欧氏空间的典范体积形式. 混合积，向量积 ······ 55

8.12　练习 ······ 60

第 9 章　欧氏仿射空间 ······ 64

9.1　定义.等距.位移 ······ 65

9.2　正交子空间;距离 ······ 67

9.3　$\mathrm{Is}(X)$ 中一个元素的结构. $\mathrm{Is}(X)$ 和 $\mathrm{Is}^+(X)$ 的生成元 ······ 71

9.4　平面等距的结构与多边形台球 ······ 76

9.5　相似 ······ 85

9.6　平面相似 ······ 95

9.7　几个点之间的距离 ······ 105

9.8　子集的稳定子群 ······ 115

9.9　曲线的长度 ······ 119

9.10　度量及微分几何：第一变分公式 ······ 125

9.11　紧子集间的 Hausdorff 距离 ······ 129

9.12　欧氏仿射空间的典范测度. 体积 ······ 133

9.13　Steiner 对称 ······ 140

9.14 练习 ………………………………………… 145

第 10 章　三角形,球面及圆 ………………………………………… 156

10.1 三角形：定义及记号 ………………………………………… 156

10.2 古典的结果 ………………………………………… 159

10.3 公式汇集 ………………………………………… 161

10.4 不等式及极小值问题 ………………………………………… 166

10.5 多边形 ………………………………………… 171

10.6 四面体 ………………………………………… 172

10.7 球面 ………………………………………… 176

10.8 反演 ………………………………………… 184

10.9 平面上的圆 ………………………………………… 189

10.10 圆束 ………………………………………… 195

10.11 有关圆的问题 ………………………………………… 199

10.12 挠平行性：第 18.9，20.5，20.7 节的先导 ………………………………………… 203

10.13 练习 ………………………………………… 206

参考书目 ………………………………………… 214

第 8 章　欧氏向量空间复习与补充

用一个欧氏仿射空间可以很好地表示我们的世界，确切地说，由于不存在自然的长度单位，这种表示至多只相差一个数量倍数．欧氏仿射空间是本书的主要内容，在下面这一章里就要开始对这种空间进行讨论．为了作一些准备，我们先讨论作为欧氏仿射空间的底空间的欧氏向量空间；因而本章不论在形式上还是在实质上，都是相当代数化的．由于自古希腊以来积累的材料极为浩繁，故我们对它们进行了筛选，并以正交群 $O(\cdot)$ 作为主线来组织这些材料，以求取得某种统一性（在 8.2.14 有一个讨论纲要）．在说明 $O(E)$ 的定义及一般性质(8.1，8.2)以后，一方面讨论 $O(E)$ 中单独一个元素的结构(特征子空间，8.4)，另一方面讨论整个 $O(E)$ 群的结构(8.5，8.3，8.9)；二维的情形主要用到复数(8.3)，三维和四维的情形用到四元数(8.9)．第 8.10 节是从文化修养以及与最新数学的联系这两个角度来安排的．8.7 节是很特殊的一节，其中引进了作为一种很精巧的不变量(在作者看来，对于中学教学来说未免过于精巧)的平面定向角，借助这一概念可以得出一些关于圆的漂亮结果，例如可参看 10.9.7. 与此相反，半直线或直线夹成的(无向)角的概念，在作者看来，则是最基本的，8.6 节对此作了讨论．第 8.8 节讨论相似性，其中有个原因是物质世界在仅相差一个数量倍数的意义上跟欧氏空间相符．最末的第 8.11 节中，除了经典的(并在众多学科中得到应用的)向量积以外，介绍了欧氏向量空间的规范体积形式，它是今后定义欧氏仿射空间规范测度的工具 (9.12)．

对数学家们逢到一个结构就作推广的做法业已习惯或者有所爱好的读者，想必已经预料到，在欧氏向量空间中舍弃某些性质后，是可以把它的结构推广成为一些新的结构的．这些结构，我们仅在第 13 章中零星地有所述及，建议读者参阅下列文献：

[DE1], [PO], [S-T], [BI 2], [AN].

若非另作申明,则本章中 E 总表示欧氏向量空间, n 表示它的维数.

8.1 定义,初步性质

8.1.1 定义. 欧氏向量空间 E 是 $\mathbf{R}$ 上的有限维向量空间,其上赋有正定的对称双线性形式 φ,即 $\varphi: E \times E \to \mathbf{R}$ 是对称双线性形式而且对所有的 $x \neq 0$ 有 $\varphi(x,x) > 0$. 记 $\varphi(x, y) = (x|y)$, 称为 x 和 y 的内积; x 的范数就是

$$\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)} = \sqrt{(x|x)}.$$

若 $(x|y) = 0$, 称 x 和 y 正交. 集合 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,k} \subset E$ 称为正交向量组,如果 $(e_i|e_j) = 0\ \forall i \neq j$; 倘若还有 $\|e_i\| = 1\ \forall_i$, 则称为标准正交向量组.

8.1.2 注

8.1.2.1 欧氏向量空间 E 的向量子空间 F 对限制 $\varphi|_F$ 而言自然地成为一个欧氏向量空间.

8.1.2.2 标准的例子是

$$E = \mathbf{R}^n \text{ 而 } \varphi((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

8.1.2.3 在 E 上, φ 是一个二次型(参见 3.3.2), 对任意的 x, y 都有

8.1.2.4

$$\begin{cases} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \\ \text{或} \\ (x|y) = \dfrac{1}{2}[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2]. \end{cases}$$

8.1.2.5 由非零向量构成的正交组必定是线性无关组.

8.1.2.6 若 $\{e_i\}$ 是 E 的标准正交基,则

$$x = \sum_i x_i e_i$$

等价于 $x_i = (x|e_i)\ \forall_i$. 另外还有

$$\left(\sum_i x_i e_i \,\middle|\, \sum_i y_i e_i\right) = \sum_i x_i y_i.$$

8.1.3 命题. 对任何 $x, y \in E$，有 $|(x|y)| \leqslant \|x\|\|y\|$. 等式仅当 x, y 线性相关时成立；更精确地说，$(x|y) = \pm\|x\|\|y\|$ 等价于存在 $\lambda, \mu \in \mathbf{R}^{\pm}$ 使 $\lambda x + \mu y = 0$. 对任何 $x, y \in E$: $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$；特别是

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

使 E 成为具有典范拓扑的度量空间（参见 2.7.1）.

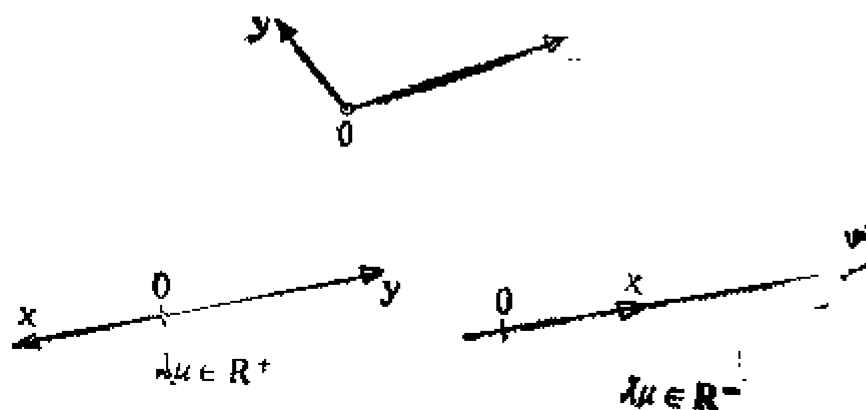


图 8.1.3.

8.1.4 命题（Schmidt 标准正交化）. 设 $\{b_i\}_{i=1,\cdots,k}$ 是 E 中一组线性无关的向量；则存在标准正交向量组 $\{a_i\}_{i=1,\cdots,k}$ 具有以下性质：$\{a_i\}_{i=1,\cdots,k}$ 同伦于 $\{b_i\}_{i=1,\cdots,k}$（参见 2.7.2.7）且 $\forall h = 1, \cdots, k$，由 $a_i (i = 1, \cdots, h)$ 生成的向量子空间与由 $b_i (i = 1, \cdots, h)$ 生成的向量子空间是相同的. 特别是，E 上任一给定的（可能是空集的）标准正交向量组必可扩充成为标准正交基，它们都同伦于某一个标准正交基.

对 k 用归纳法. 对 $k = 1$，取 $a_1 = b_1^n = \|b_1\|^{-1} b_1$，其中对任一 $x \in E$，x^n 表示 x 经标准化后所成向量，即 $x^n = \|x\|^{-1} x$；x^n 必同

伦于 x，同伦可取为 $x(t)=tx''+(1-t)x$，$t\in[0,1]$，即连结端点 x，x'' 的线段。现假设 $\{a_i\}_{i=1,\cdots,h-1}$ 已作出，要作 a_h；相继置

$$d_h=\sum_{i=1}^{h-1}(a_i|b_h)a_i,\quad c_h=b_h-d_h,\quad a_h=c_h^*.$$

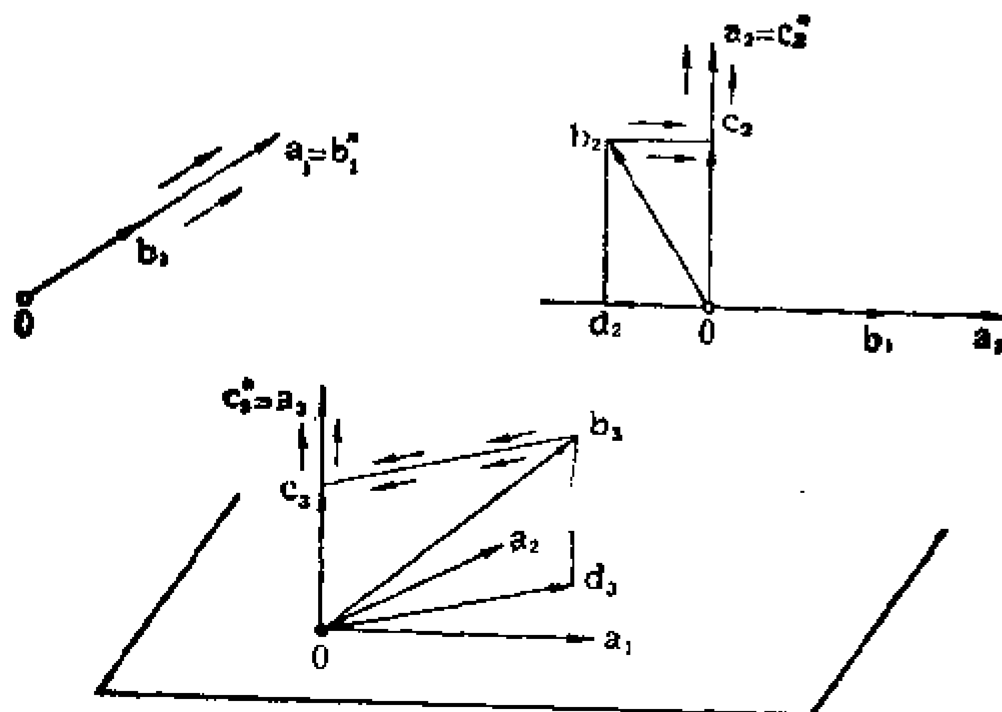


图 8.1.4.

可直接验证 $\{a_i\}_{i=1,\cdots,h}$ 满足命题要求，同伦即可取为相继所作的同伦的合成；其中最后的两个同伦，由 b_h 到 c_h 的为 $b_h(t)=tc_h+(1-t)b_h$，由 c_h 到 a_h 的有如前述。

8.1.5 命题. 设 E，E' 是两个维数相同的欧氏向量空间，$f:E\to E'$ 是集合的映射，则下述命题是等价的：

(i) $f\in L(E;E')$ 且 $\|f(x)\|=\|x\|\ \forall x\in E$；

(ii) $\forall x,y\in E:(f(x)|f(y))=(x|y)$.

这样的 f 必为双射，称为等距。等距的全体记为 $O(E;E')$。

(i) 蕴涵 (ii) 可由 f 线性和 8.1.2.4 推出。(ii) 蕴涵 (i)：在 E 中取一个标准正交基 $\{e_i\}$（参见 8.1.4）。由 (ii) 和维数相等的条件，$\{f(e_i)\}$ 是 E' 的标准正交基；然而由 8.1.2.6 和 (ii) 可知

$$f\left(\sum_i x_i e_i\right)=\sum_i x_i f(e_i),$$

因此 f 是线性的。

8.1.6 推论. 每个 n 维欧氏向量空间都与 $\mathbf{R}^n$ 等距(参见 8.1.2.2).

8.1.7 有人把 8.1.6 中的"与 $\mathbf{R}^n$ 等距"就说成"与 n 维欧氏空间等距";如果对自己所用的术语含义清楚的话，这样说也未始不可.

8.1.8 对偶

8.1.8.1 引理. 设 E 是欧氏向量空间，E^* 是作为实向量空间的对偶空间，则映射 $b: E\ni x\longmapsto x^b=\{y\longmapsto(x|y)\}\in E^*$ 是向量空间的同构. 逆映射记为 $\#=b^{-1}: E^*\to E$.

我们知道 $\dim E=\dim E^*$ (例如可由对偶基的概念看出);由于 b 是线性的,只须再说明 b 的核是零. 然而,若对每一 y 有

$$(x|y)=0,$$

则特别地有 $(x|x)=\|x\|^2=0$, 因而 $x=0$,

8.1.8.2 引理 8.1.8.1 使我们可以赋予 E^* 一个自然的欧氏空间结构,以后遇有需要时我们将作出这一结构.由 2.4.8.1 和 8.1.8.1 可以导出:

8.1.8.3 定义.命题. 对 E 的子集 A, 令

$$A^\perp=\{x\in E:(x|y)=0\ \ \forall y\in A\}$$

并称为 A 的正交集. $\forall A\subset E$, 这一正交集是一个向量子空间，若 $\langle A\rangle$ 表示由 A 生成的 (向量) 子空间，就有 $A^\perp=\langle A\rangle^\perp$. 对每一子空间 A, 我们有直和 $A\oplus A^\perp=E$; $\dim A+\dim A^\perp=\dim E$. $A^{\perp\perp}=A$. 若 A, B 是两个子空间，则 $(A+B)^\perp=A^\perp\cap B^\perp$, $(A\cap B)^\perp=A^\perp+B^\perp$. 如果 $A\subset B^\perp$, 称 A, B 是正交的,这时也有 $B\subset A^\perp$, 因而记作 $A\perp B$.

8.1.8.4 记号. 如果 $E=V\oplus W$ 是直和,而且 $W=V^\perp$, 我们就说这是一个正交直和,记作 $E=V\overset{\perp}{\oplus}W$. 更一般地，对一族子空间可以有

$$E=V_1\overset{\perp}{\oplus}\cdots\overset{\perp}{\oplus}V_k=\overset{\perp}{\bigoplus_i}V_i.$$

8.1.8.5 在三维的特殊情形下，8.1.8.3 重又证明了用公理方法建立的欧氏几何的结果如下：过定点垂直于已知直线的全体直线的集合是一张平面，即该直线的垂直平面．如果考虑过定点分别垂直于两张已知平面的两条直线 D，D'，那么由 D 和 D' 张成的平面恰是直线 $P\cap P'$ 的垂直平面．读者想必会看出，第一个结果就有很大的实用意义：有了它，附图中的门就可以开关自如，没有任何理论上的困难．对这一结果的古典的阐述，见 [HD2]．

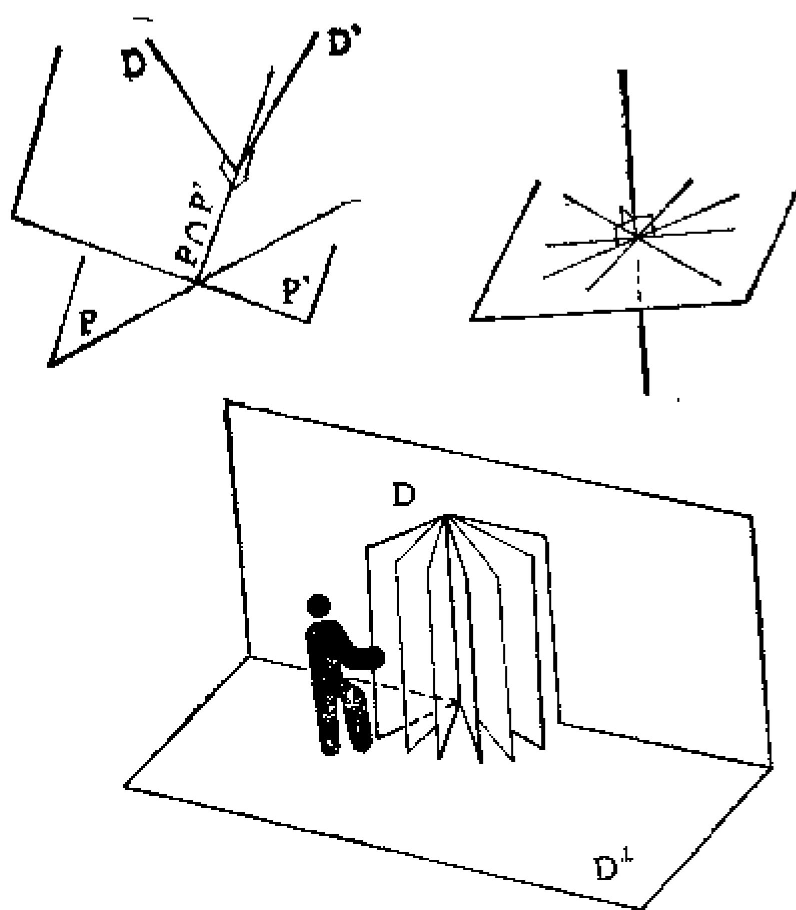


图 8.1.8.4.

8.1.8.6 根据引理 8.1.8.1，可定义一个自同态 $f:E\circlearrowleft$ 的**伴随**自同态，记作 ${}^t f$．实际上，$f:E\to E'$ 诱导出**转置**自同态 $f^*:E'^*\to E^*$；因而令 ${}^t f=\#\circ f^*\circ b:E\to E$ 并把 ${}^t f$ 称为 f 的**伴随自同态**．因此就有

$$({}^t f(x)\,|\,y)=(x\,|\,f(y))\quad\forall x,y\in E.$$

8.2 正交群:初步性质与讨论纲要

8.2.1 命题. 记 $O(E)=O(E;E)$, 称为E的正交群;记
$$O(n)=O(\mathbf{R}^n).$$
$f\in O(E)$ 的充要条件是 f 的矩阵A在任一或某一标准正交基下满足 ${}^tAA=I$（其中 ${}^t\cdot$ 表示矩阵的转置,I 表示单位矩阵). 特别有 $\det f=\pm1$; 记 $O^+(E)=\{f\in O(E):\det f=1\}$,
$$O^-(E)=\{f\in O(E):\ \det f=-1\};$$
$O^+(E)$的元素称为旋转. 还有: $f\in O(E)\Longleftrightarrow {}^tff=\mathrm{Id}_E$（参见 8.1.8.6).

这个命题可由下述引理推出,而下述引理则可由 8.1.2.6 和矩阵乘积的定义推出:

8.2.2 引理. 设$\{e_i\}$是E的一个标准正交基,A,B 是两个方阵,阶数都等于 E 的维数;若将 A,B 分别写成由列向量组成的形式
$$A=(x_1,\cdots,x_n),\quad B=(y_1,\cdots,y_n),$$
则有
$${}^tAB=((x_i|y_j)).$$

8.2.3 注

8.2.3.1 若 $\dim E=n$, 则由 8.1.6 可知 $O(E)$ 同构于 $O(n)$. 因此, 对正交群的线性群结构的研究, 只须对 $O(n)$ 进行讨论即可.

8.2.3.2 子群 $O^+(E)$ 是 $O(E)$ 的正规子群. 我们有下列明显的乘法法则:
$$O^-(E)O^-(E)\subset O^+(E),\ O^-(E)O^+(E)\subset O^-(E).$$

8.2.3.3 $O(E)\subset GL(E)$（参见 2.7.1) 在诱导拓扑下是紧的:事实上, 对有限维向量空间E的任一基,若 $A(f)$ 表示 f 关于该基的矩阵, 则映射 $f\longmapsto(\mathrm{trace}\ ({}^tA(f)A(f)))^{1/2}$ 就是 $GL(E)$ 上的一个欧氏结构的范数. 现在若 E 是欧氏向量空间而基是标准正交的, 则由 8.2.1, $O(E)$中所有的元素在上述意义下的范数都等于

$n=\dim E$；因此 $O(E)$ 是 $\mathrm{GL}(E)$ 中的有界集；但由 ${}^tAA=I$ 的条件可知它又是闭集，因而就是紧集。说明 $O(E)$ 是有界集的另一方法是：对于 E 的欧氏范数，在 $\mathrm{GL}(E)$ 中应用线性映射全体所成空间的范数（非欧氏范数！）：于是由 $O(E)$ 的定义有：

对 $f\in O(E):\|f\|=\sup\{\|f(x)\|:x\in E$ 且 $\|x\|=1\}=1$.

8.2.4 由 $O(E)\subset \mathrm{GL}(E)$ 是紧子群，可有下述有用的逆定理：

8.2.5 定理. 设 E 是有限维实向量空间，不必是欧氏的，G 是 $\mathrm{GL}(E)$ 的紧子群，则在 E 上至少存在一个欧氏结构 φ 使得 $G\subset O(E)$，其中 $O(E)$ 是这一欧氏结构的正交群。

8.2.5.1 要给出一个最简捷的证明，就必须用到紧群上 Haar 测度的存在性的概念（对此例如可见 [DE4]，第 219 页以后）；设 dg 是 G 上的 Haar 测度，φ 是 E 上的任一欧氏结构。对 $g\in G$，定义一个欧氏结构 $g^*\varphi$ 如下：

$$(g^*\varphi)(x,y)=\varphi(g(x),g(y))\ \ \forall x,y\in E;$$

所求的欧氏结构取为 $g^*\varphi$ 关于测度 dg 的平均值即可，即令

$$\bar{\varphi}=\int_{g\in G}g^*\varphi dg,$$

亦即对任何 x,y：

$$\bar{\varphi}(x,y)=\int_{g\in G}\varphi(g(x),g(y))dg.$$

容易看出 $\bar{\varphi}$ 仍是 E 上欧氏结构，而且 $\bar{\varphi}$ 在 G 下不变，即

$$g^*\bar{\varphi}=\bar{\varphi}\ \ \forall g\in G.$$

这一点可由 $\bar{\varphi}$ 的构造和测度 dg 在 G 中平移下不变的事实得证。然而

$$g^*\bar{\varphi}=\bar{\varphi}\ \ \forall g\in G$$

就等于说 $G\subset O(E)$，其中 $O(E)$ 是 $(E,\bar{\varphi})$ 的正交群。

8.2.5.2 第二种证明从 2.7.5.7 出发，仅用到有限维实向量空间中 Lebesgue 测度的理论。我们在 n 维实向量空间 E 上的二次型所构成的实向量空间 $\mathscr{P}_2^\bullet(E)$（这时 $\mathscr{P}_2^\bullet(E)$ 就是 $n(n+1)/2$ 维的）中进行讨论。在 $\mathscr{P}_2^\bullet(E)$ 中，正定二次型所成的子集 $Q(E)$ 是一个开的凸锥，且在如 8.2.5.1 中那样由 $g^*\varphi$ 定义的 G 的作用下

稳定. 从 $Q(E)$ 中任一 φ 出发, φ 在 G 的作用下的轨道

$$K=\{g^*\varphi: g\in G\}$$

是 $\mathscr{P}_2^{\bullet}(E)$ 的紧子集, 且 $K\subset Q(E)$. 因此中心 cent(K) 在 $Q(E)$ 中, 而且由 2.7.5.7 可知它在 G 的作用下不变.

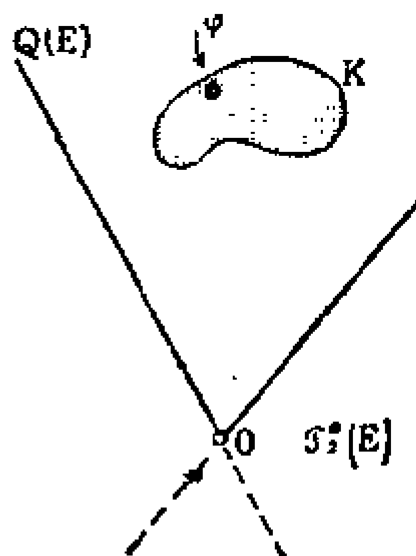


图 8.2.5.2.

8.2.5.3. 我们在 11.8.10.8 中还会看到 8.2.5 的第三种几何方法的证明, 它从凸性出发, 并不用到测度理论.

8.2.6 注. 在 G 下不变的欧氏结构一般来说并非唯一的, 试考虑 G 缩成 E 的恒等变换的情形! 可是存在一个很好的准则: G 容有一个唯一的(在不计相差一个常数倍数的情况下!)不变欧氏结构的充要条件是 G 在 $GL(E)$ 中不可约, 即 E 不容有除 $\{0\}$ 和 E 以外的任何对每一 $g\in G$ 稳定的子空间. 见 8.12.1.

关于 8.2.5 的最新应用, 除 8.1.2.1 外, 还可参阅例如 [PA] 或 [TG] 第八章.

若 G 是有限群, $G=\{g_i: i\in I\}$, 只要取 $\bar\varphi=\sum_i g_i^*\varphi$ 即可!

8.2.7 命题. (设 $\dim E\geqslant 2$.) 群 $O^+(E)$ 在 E 的单位球面

$$S(E)=\{x\in E: \|x\|=1\}$$

上可迁, 在 E 的所有的 Grassmann 流形 $G_{E,p}(0\leqslant p\leqslant \dim E)$

(参见 1.2.5) 上也可迁． 群 $O(E)$ 在 E 的标准正交基的集合上是单可迁的；群 $O^+(E)$ 在同伦标准正交基的集合上是单可迁的(参见 2.7.2.7)．

8.2.8 根据 8.2.4，可将 n 维的标准球面，譬如说 $S^n = S(\mathbf{R}^{n+1})$，写成齐性空间 (参见 1.5.5)

$$S^n = O(n+1)/O(n),$$

其中 $O(n)$ 是作为 $O(n+1)$ 中由保持向量 $(0,\cdots,0,1)\in\mathbf{R}^{n+1}$ 不动的 f 所构成的子群而自然地嵌入 $O(n+1)$ 的．同样，对 Grassmann 流形有

$$G_{n,p} = O(n)/(O(p)\times O(n-p)),$$

其中 $O(p)\times O(n-p)$ 是子群 $O(p)$ 和 $O(n-p)$ 的直积，$O(p)$ 由保持 $\mathbf{R}^n$ 的典范基中的 $n-p$ 个向量 $e_{p+1},\cdots,e_n$ 不动的 $f\in O(n)$ 所构成 ($O(n-p)$ 对 $e_1,\cdots,e_p$ 有类似情形)．

8.2.9 命题． 设 $E = S\oplus T$ 是直和分解，σ 是关于 S 平行于 T 的对称 (参见 6.4.6)，则 $\sigma\in O(E)$ 的充要条件是 $E = S\overset{\perp}{\oplus}T$ (即 $T = S^\perp$)；这时把 σ 记作 σ_S．这样的 σ 称为欧氏空间 E 的(**正交**)**对称**，若 $\dim S^\perp = 1$，则称为**超平面对称**；若 $\dim S^\perp = 2$，则称为**中心对称**．我们有 $\sigma_S\in O^\pm(E)$，$\dim S^\perp$ 是偶数时取 $+$，$\dim S^\perp$ 是奇数时取 $-$．每个对称都是对合，反之，每个使 $f^2 = \mathrm{Id}_E$ 的 $f\in O(E)$ 都是对称．

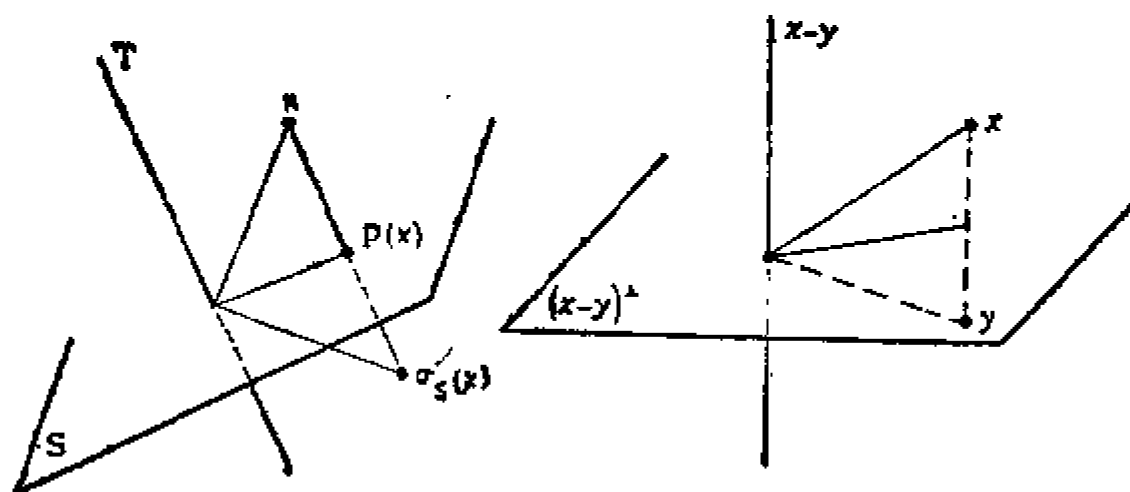


图 8.2.9.

8.2.10 知道当H是超平面时σ_H的具体表达式是很有用的；若x是$H^\perp$(其维数为1)的一个非零向量，则

$$\boxed{\sigma_H(y) = y - 2\frac{(y|x)}{\|x\|^2}x.}$$

8.2.11 若$x, y \in E$且$\|x\| = \|y\|$，则存在超平面H使$\sigma_H(x) = y$；若$x \neq y$，$x \neq 0$，则H是唯一的. 事实上，若$x = y$，则任一含有x的超平面都满足要求，否则H必为$H = (y - x)^\perp$，仍满足要求. 注意到H就是x和y的垂直平分超平面，即

$$H = \{z \in E : d(x, z) = d(y, z)\},$$

参见9.7.5.

8.2.12 定理. 每一$f \in O(E)$是至多$n = \dim E$个超平面对称的乘积.

事实上，只须应用8.2.11并作递推；最后归结到f，而且

$$f(x) = x \quad (x \neq 0),$$

但这时f保持$x^\perp = S$不动，而S的维数严格小于E的维数.

8.2.13 **推论.** 若$\dim E = 1$，则$O(E) = \mathrm{Id}_E \cup (-\mathrm{Id}_E)$. 若$\dim E = 2$，则每一$f \in O^-(E)$是超平面对称，即关于一条直线的对称，每一$f \in O^+(E)$是两个关于直线的对称的乘积.

尽管8.2.12的证明很简单，我们还是把它称作定理，原因是它有很基本的应用. 当把欧氏结构代之以在任意域上有限维向量空

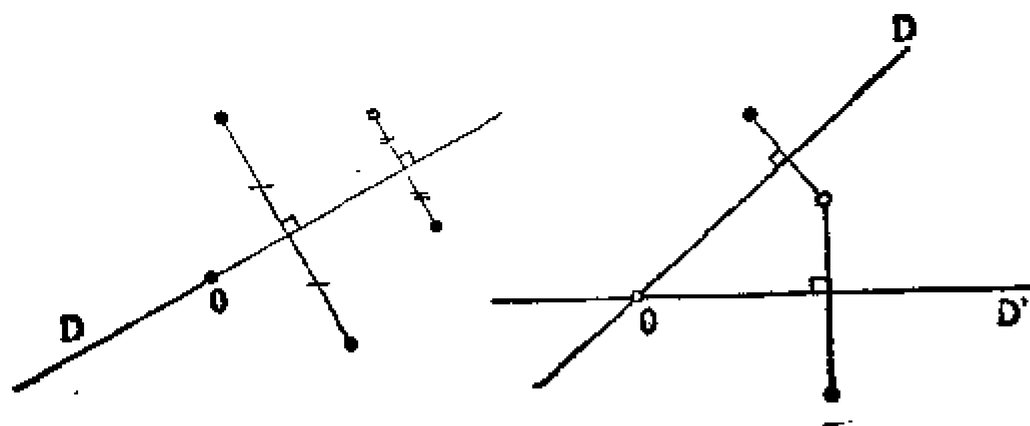


图 8.2.13.

间中的一个非退化（除此以外毫无要求）的二次型时，8.2.12 仍成立，但证明要困难得多；这个证明将是第十三章的一个主要内容.

8.2.14　以后有关 $O(E)$ 的讨论的纲要

$O(E)$ 中一个元素的结构：讨论 $f\in O(E)$（相应地，$O^+(E)$）所能分解成的超平面对称（相应地，中心对称）的最小个数（见 8.4.5，8.4.6）；我们将把一个 $f\in O(E)$ 分解成一维或二维子空间的等距的乘积（见 8.2.15），由此还可引出对 $O(2)$ 的深入讨论（因为 $O(1)$ 是平凡的，见 8.2.13），重要的结论是 $O^+(2)$ 为交换群.

整个 $O(E)$ 群的结构：除 $O^+(2)$ 是交换群以及有关 $O(E)$ 或 $O^+(E)$ 的中心的很简单的讨论外，还将证明对 $n=3$ 和 $n\geqslant 5$，$O^+(n)$ 都是单群：见 8.5．$O(4)$ 不是单群，这一例外的情形将在 8.9.10 中借助于四元数进行讨论．借助四元数还能对 $O(3)$ 和 $O(4)$ 进行细致的讨论.

$O(E)$ 的拓扑与代数拓扑：在 8.4.3 中可以看到 $O^+(E)$ 是弧连通的，因而 $O^+(E)$ 和 $O^-(E)$ 是 $O(E)$ 的两个连通分支．接下去，在 8.10.3 中可以看到基本群 $\pi_1(O(n))$ 在 $n=2$ 时是 $\mathbf{Z}$，而在 $n\geqslant 3$ 时是 $\mathbf{Z}_2$．我们在这里得到了数学中两个很重要的结果：$\pi_1(O(2))=\mathbf{Z}$ 是单复变量函数论和平面曲线的几何理论的一块基石；而 $n\geqslant 3$ 时 $\pi_1(O(n))=\mathbf{Z}_2$ 则是数学中一些出人意料的发展的源泉．凡此种种均见 8.10.3.

8.2.15　引理. 设 $f\in O(E)$，则存在正交直和

$$E=\overset{\perp}{\bigoplus_i}P_i$$

使 $\forall i$ 有 $f(P_i)=P_i$，且 $\forall i$ 有 $\dim P_i=1$ 或 2.

根据 7.4.3，存在一维或二维向量子空间 $P_1\subset E$ 使 $f(P_1)=P_1$．由于 f 保持内积，就有 $f(P_1^\perp)=P_1^\perp$；但 $\dim P_1^\perp<\dim E$，递推即得所需结论．不用到复化，亦即只在实的范围中进行的证明，可参看 8.12.2 和 8.12.3.

上述引理说明，要研究 $f\in O(E)$，只要研究 $\dim E=1$ 或 2 时的 $O(E)$ 就可以了；$\dim E=1$ 就是 8.2.13 的情形，$\dim E=2$ 的

情形将在下一章中讨论.

8.2.16 $O(E)$ 和 $O^+(E)$ 的中心. $\dim E = 2$ 的情形放在下节讨论,现在假设 $\dim E \geqslant 3$ 而且

$$f \in O(E) \mid fg = gf \quad \forall g \in O^+(E).$$

对 g 特别地取中心对称 σ_V, 其中 V 是余维数为 2 的 E 的子空间(参见 8.2.9); 我们有 $\sigma_V = g \in O^+(E)$ 和 $g(x) = x \ \forall x \in V$, 因而 $f(V) = V$. 这个结论对上述的任一 V 都正确,因而对任一向量直线 D 有 $f(D) = D$, 由此即知 f 是一个位似: $f = \lambda \mathrm{Id}_E$ (参见 4.5.3). 但由 $f \in O(E)$ 有 $\lambda = \pm 1$, 从而 $f = \pm \mathrm{Id}_E$, 注意到 f 的行列式的符号,就可得下述命题:

8.2.17 命题. $O(E)$ 的中心是 $\mathrm{Id}_E \cup (-\mathrm{Id}_E)$. $O^+(E)$ 的中心,当 E 为奇数维时是 $\{\mathrm{Id}_E\}$, 当 E 为偶数维时是 $\mathrm{Id}_E \cup (-\mathrm{Id}_E)$.

8.3 $\dim E = 2$ 时 $O(E)$ 的结构

本节中 E 是欧氏向量平面:仅当特别指明时 E 才是定向的.

8.3.1 引理. 对于 E 中一个给定的标准正交基以及 $f \in GL(E)$ 在这一基下的矩阵 $M(f)$, 有

(i)

$$f \in O^-(E) \Longleftrightarrow M(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ 且 } a^2 + b^2 = 1;$$

(ii)

$$f \in O^-(E) \Longleftrightarrow M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ 且 } a^2 + b^2 = 1.$$

此外,对给定的 f, 实数 a 和 $|b|$ 与这个基的选取无关.

设 $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ 是基,

$$M(f) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

即 $f(e_1) = (a, b)$, $f(e_2) = (c, d)$. 根据假设, $f(e_2) \in (f(e_1))^\perp$;

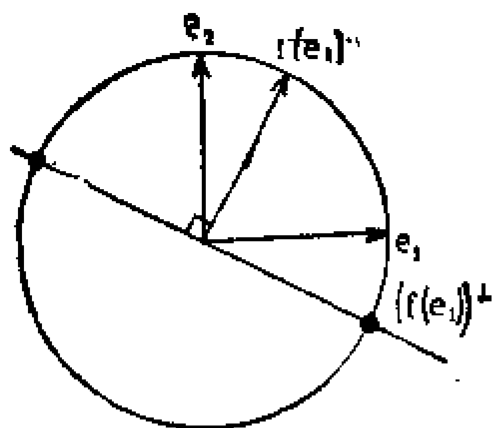


图 8.3.1.

但 $\dim(f(e_1))^\perp = 1$ 而 $(-b, a) \in (f(e_1))^\perp$. 因此 $f(e_2) = (-kb, ka)$, $k \in \mathbf{R}$; 但由 $\|f(e_2)\| = \|f(e_1)\| = 1$ 可推得

$$a^2 + b^2 = 1 \text{ 和 } k = \pm 1.$$

至于数量 a，它与基的选取无关，因为 $\operatorname{trace} f = 2a$; 而 $|b|$ 也与基的选取无关则因为 $b^2 = 1 - a^2$.

8.3.2 注. 上面的证明表明，给定范数为 1 的 e_1 和 u 后，存在唯一的 $f \in O^\pm(E)$ 使 $f(e_1) = u$，因为 $f(e_2)$ 在 $(f(e_1))^\perp$ 上只有两个相对的可选的值，因而一个值决定了 $O^+(E)$ 中的一个 f，而另一个值决定了 $O^-(E)$ 中的一个 f. 这种单可迁性也可由 1.4.4.1 得出.

8.3.3 定理. 集合 $O^-(E)$ 是关于 E 中直线的对称全体的集合. 群 $O^+(E)$ 是交换群并且在圆 $S(E) = \{x \in E: \|x\| = 1\}$ 上单可迁.

第一个结论可由 8.2.13 推出; 单可迁性可由 8.3.2 推出. 可交换性则可由下列计算推出:

8.3.4

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + a'b) \\ ab' + a'b & aa' - bb' \end{pmatrix}.$$

8.3.5 推论. 若 E 已定向，则 b 不依赖于所取正向标准正交基的选取. 若 $f \in O^+(E)$, $g \in O^-(E)$, 则 $fg = gf^{-1}$. 任一 $f \in O^+(E)$ 是两个关于直线的对称的乘积，其中第一次所用的直线可以任意

选取。

设 $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ 是两个正向标准正交基，$f\in O^+(E)$. 矩阵 $M_{\mathscr{B}}(f)$ 和 $M_{\mathscr{B}'}(f)$ 是相似的: $M_{\mathscr{B}'}(f)=(M_{\mathscr{B}}(t))^{-1}M_{\mathscr{B}}(f)M_{\mathscr{B}}(t)$, 其中 t 由 $\mathscr{B}'=t(\mathscr{B})$ 所定义. 但由于 $O^-(E)$ 是交换群，即得 $t\in O^+(E)$ 及 $M_{\mathscr{B}'}(f)=M_{\mathscr{B}}(f)$. 若 $f\in O^+(E)$, $g\in O^-(E)$, 就有 $fg\in O^-(E)$ (参看 8.2.3.2)，因此（参看 8.3.3）fg 是一个对称，从而就是对合: $fgfg=\mathrm{Id}_E$; 然而 $g\in O^-(E)$ 也是对合. 最后，若 $f\in O^+(E)$, g 是 $O^-(E)$ 中任一对称，则总可将 f 写成 $f=(fg)g$.

8.3.6 命题. 由 $f\longmapsto a$ 定义的映射 $O^+(E)\to\mathbf{R}$ 称为余弦，记作 cos，其中 a 是 8.3.1 中的数量. 若平面还是定向的，则将由 $f\longmapsto b$ 定义的映射 $O^+(E)\to\mathbf{R}$ 称为正弦并记作 sin，其中 b 是 8.3.5 中的数量. 对于定向的 E，映射

$$\Theta: O^+(E)\ni f\longmapsto \cos f+i\sin f\in\mathbf{C}$$

是从 $O^+(E)$ 到模 1 的复数全体所成的群 $\mathbf{U}$ 上的同构. 而且当 $O^+(E)\subset\mathrm{GL}(E)$ 和 $\mathbf{U}\subset\mathbf{C}$ 都取诱导拓扑时，这个映射 Θ 是同胚.

根据 8.3.4，这个映射是同态；由于 8.3.1 中 $a^2+b^2=1$，它是满射，单射则是显然的. 最后，由于 Θ 显然连续而 $O^+(E)$ 紧，可知它是同胚.

8.3.7 复习. 由复指数函数

$$z\longmapsto e^z=\sum_n\frac{z^n}{n!}$$

派生的映射 $\Lambda:\mathbf{R}\ni t\longmapsto e^{it}\in\mathbf{C}$ 是从加法群 $\mathbf{R}$ 到交换群 $\mathbf{U}$ 上的同态. 此外，核 $\Lambda^{-1}(1)$ 形如 $\xi\mathbf{Z}$，其中 $\xi>0$. 我们记 $\xi/2$ 为 π，以使 $\Lambda^{-1}(1)=2\pi\mathbf{Z}$. 圆 $\mathbf{U}$ 同胚于商拓扑空间 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. 最后，也分别将由 $\cos t=e^{it}$ 的实部，$\sin t=e^{it}$ 的虚部所定义的从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 中的两个映射称为余弦和正弦.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{R}\\ & & \downarrow\Lambda\\ O^+(E) & \xrightarrow[\Theta]{} & \mathbf{U}\end{array}$$

8.3.8 8.3.7 的证明，可参阅 [FL]，第 181—183 页或 [CH2]，第 30 页等。

根据 8.3.7，还可由 $\mathbf{R}$ 的弧连通性推出 $\mathbf{U}$——因而任何欧氏平面 E 上的圆 $S(E)$——是弧连通的。也可参看 8.12.4。

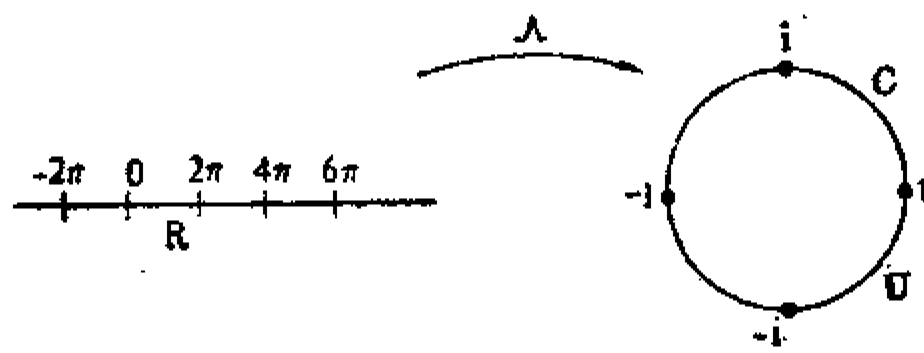


图 8.3.8.

8.3.9 定义. 设 $f\in O^-(E)$，E 已定向. 任一元素 $\theta\in\Lambda^{-1}(\Theta(f))$ 称为 f 的一个**测度**（参见 8.3.6）；所有其它测度都形如 $\theta+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$。

8.3.10 若 θ 是 f 的一个测度，则 f 在任何正向标准正交基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，其中用到了余弦和正弦映射 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$。

8.3.11 附注. 限制函数 $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$ 是双射；其逆双射记为 Arccos. 限制函数 $\sin:[0,\pi]\to[0,1]$ 不是双射，应限制成 $[0,\pi/2]\to[0,1]$ 才是双射；这时，其逆双射记为 Arcsin。

8.3.12 问题与答案. 我们常将 $\mathbf{R}^2$ 与 $\mathbf{C}$ 等同；但因受 8.3.6 启发，我们很希望能将定向欧氏平面 E 以内在的方式与 $\mathbf{C}$ 等同. 这并不是当然可行的.但有一点可以做到，那就是仅仅利用 E 的欧氏结构和定向来在 E 上给出一种复直线的结构. 事实上，令 $\partial\in O^+(E)$ 是 E 中的旋转，它的一个测度为 $\pi/2$，在 E 定义复纯量乘法为

$$(\lambda+i\mu)x=\lambda x+\mu\partial(x).$$

由于 $\partial^2=-\mathrm{Id}E$ 而且 $\partial\in GL(E)$，可知 E 在上述乘法及 E 的

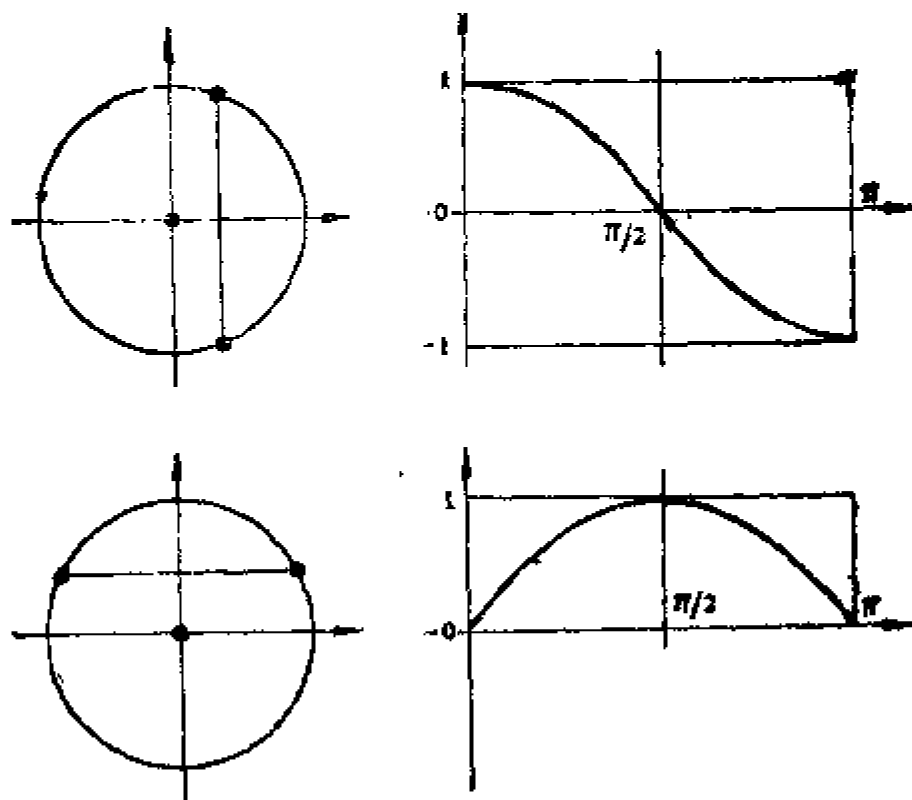


图 8.3.11.

向量加法下确是一个复向量空间. 在 8.7.3.5 中还会以另外的方式(不用测度)出现 ∂. 注意到 $O^+(E)$ 的元素可以等同于 $|a|=1$ 时的线性映射 $z\longmapsto az$,而(实)位似可以等同于 $b\in\mathbf{R}^*$ 时的 $z\longmapsto bz$.

8.3.13 附注. 我们会发现, 通过复指数来"量"角是代价很大的. 实际上这里有一个很根本的困难, 因此不存在任何方便的处理方法;要弄清这一点, 读者可参阅 [FL] 第 178—186 页, [DE2] 第 161—164 页, [BI 1] 第 V 章 §2 和第 VIII 章 §2.

不难证明所有的连续满射同态 $\mathbf{R}\to\mathbf{U}$ 必有 $t\longmapsto A(kt)$, $k\in\mathbf{R}^*$ 的形式: 参看 [FL], 第 184 页.

8.4 O(E) 中一个元素的结构. O(E) 和 O⁺(E) 的生成元

8.4.1 命题. 设 $f\in O(E)$; 存在 E 的一个正交基使 f 的矩阵在这

个基下形如

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & & \\ & -I_q & & & 0 & \\ & & A_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & A_r \end{pmatrix},$$

其中 I_p 和 I_q 分别是 p 阶和 q 阶的单位矩阵，

$$A_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}，而 \theta_i\in\mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}\quad \forall i=1,\cdots,r.$$

8.4.2 上述结果可由 8.2.15 和 8.3.10 推出．这样的结构不是唯一的，不仅 θ_i 可相差 $2\pi\mathbf{Z}$，而且尤其当某些 A_i 的角相等时，基就不是唯一的；说明可参阅 18.8．反之，I_p 和 $-I_q$ 这两部分是唯一的，其中整数 p，q 以及基中与之相应的部分都是唯一确定的：实际上它们就对应于 f 关于特征值 1 和 -1 的特征子空间 $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E-f)$ 和 $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E+f)$，特别是 p，q，r 仅与 f 有关．

8.4.3 推论． 群 $O(E)$ 有两个连通分支：$O^+(E)$ 和 $O^-(E)$，它们而且还是弧连通的．对任一有限维实向量空间 E，群 $\mathrm{GL}(E)$ 总有两个连通分支：$\mathrm{GL}^+(E)$，$\mathrm{GL}^-(E)$，它们也都是弧连通的．

为了证明后半部分，我们任意赋予 E 一个欧氏结构；由 8.1.4 可知，只须证明 $O^+(E)$ 弧连通即可（参见 2.7.2.9）．于是，设 $f\in O^+(E)$ 并应用 8.4.1；在前述记号下，注意到 $\det f=1$ 时 q 是偶数；$O^+(E)$ 中一条从 f 到 Id_E 的连续道路就可以通过下述矩阵来对 $t\in[0,1]$ 定义：

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & & & \\ & B_1(t) & & & & & \\ & & \ddots & & 0 & & \\ & & & B_{q'}(t) & & & \\ & 0 & & & A_1(t) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & A_r(t) \end{pmatrix}$$

其中

$$B_1(t) = \cdots = B_{q'}(t) = \begin{pmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix},$$

$$A_i(t) = \begin{pmatrix} \cos t\theta_i & -\sin t\theta_i \\ \sin t\theta_i & \cos t\theta_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, \cdots, r).$$

还可以对 $O^-(E)$ 的弧连通性给出一个更初等的证明，既不用到 8.4.1，也不用到角的测度(复指数函数：8.3.7)。做法仍是在两个与 E 的定向相同的标准正交基 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}'$ 之间找出一条连续道路来。设 $\mathscr{B} = \{e_i\}$, $\mathscr{B}' = \{e_i'\}$；我们通过连续的方式归结为 $e_1 = e_1'$，然后考虑正交补 $e_1^\perp$，即可由归纳法证得结论。假定 $e_1 \neq e_1'$ 而 P 是 e_1 和 e_1' 张成的平面；由于圆周 $S(P)$ 是弧连通的（参看 8.3.8，尤其是 8.12.4），从 e_1 到 e_1' 的一条连续道路 γ 很容易扩充成从 $\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{B}''$ 的一条连续道路，这里 $\mathscr{B}''$ 的第一个向量是 e_1'.

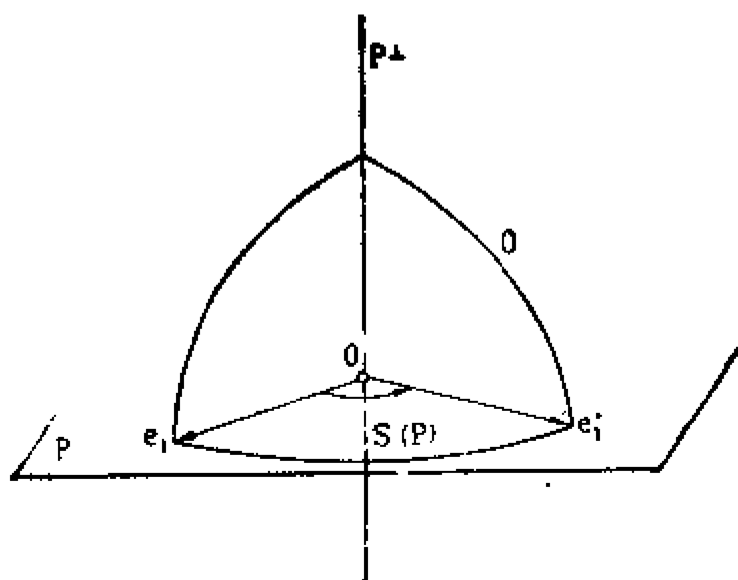


图 8.4.3.

8.4.4 现在我们来说明，定理 8.2.12 中 $f \in O(E)$ 所分解出的超平面对称最少是多少。然后，跟 8.2.12 表明 $O(E)$ 由超平面对称生成相仿，我们证明 $O^+(E)$ 由中心对称生成并讨论至少需由多少个中心对称才能生成(当 $\dim E \geqslant 3$ 时)。

8.4.5 命题. 设 $f \in O(E)$ 且

$$s = \dim E - \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E));$$

则 f 可以写成 s 个超平面对称的乘积，但不可能写成个数 $< s$ 的乘积。若 f 是 s 个超平面对称的乘积，则这些超平面的交就是 $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$。

若 $f = \sigma_{H_1} \cdots \sigma_{H_k}$，则 $H_1 \cap \cdots \cap H_k \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$，从而 $k \geqslant s$；若 $k = s$，则有 $H_1 \cap \cdots \cap H_s = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$。设 $f \in O(E)$，应用 8.4.1 可得出所需的生成 f 的 s 个超平面对称如下：对每个基向量 $e_i \in \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$，取超平面对称 $e_i^{\perp}$；对于平面 P_i 的一个相伴矩阵 A_i，我们将所考虑的 P_i 的旋转分解为（参看 8.2.13）两个关于 P_i 上直线的对称，它们可通过恒等映射嵌入 $P_i^{\perp}$，故为超平面对称。

8.4.6 命题. 设 $f \in O^+(E)$，$\dim E \geqslant 3$ 且

$$s = \dim E - \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E)),$$

则 f 是 s 个中心对称的乘积。

当 $\dim E = 2$ 时，这个结论不成立，因为这时 E 的唯一的中心对称是 $-\text{Id}_E$，它根本不可能生成 $O^+(E)$。下文中不再用到 8.4.6（除 8.5.3.1 外），所以我们将其证明留给读者作为习题（参看 [FL]，第 193 页），但 $\dim E = 3$ 的情形则可立即由 8.4.7.1 和 8.2.13 得出。

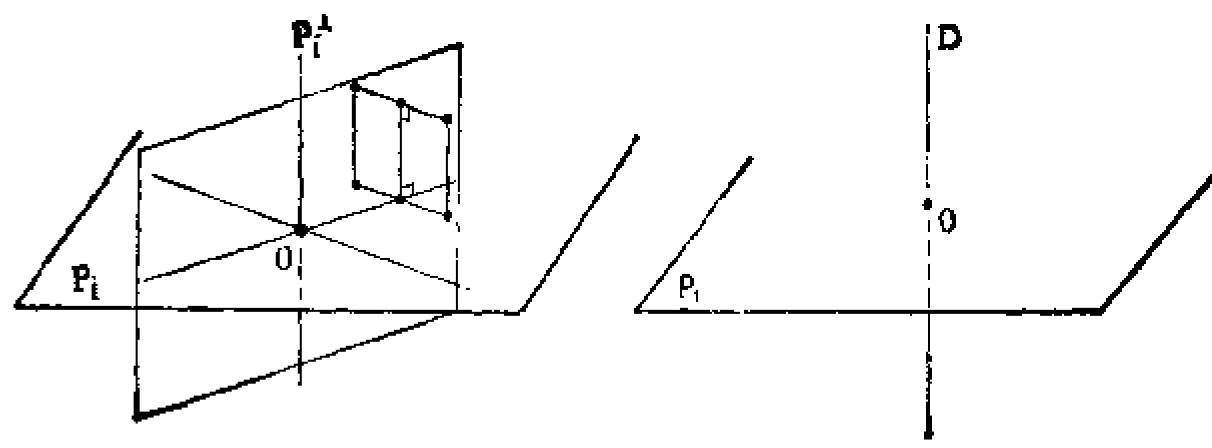


图 8.4.6.

8.4.7 例

8.4.7.1 3 维时的 $O^+(E)$. 根据 8.4.1，每个 $f\in O^+(E)\backslash \mathrm{Id}_E$ 有唯一的一条向量直线 D 与之相伴，称该直线为 D 轴；称 f 为关于 D 轴的旋转. 实际上，$f|_{D^\perp}\in O^+(D^\perp)$ 而 $D^\perp$ 是一个平面. 于是这个 f 还有一个 $[0,\pi]$ 之间的角与之相伴（参看 8.6）；若这个角是 π，f 就是中心对称 σ_D. 为了具体计算这个角 θ，只须注意到由于 8.4.1，f 的迹是 $1+2\cos\theta$；然而这个迹又是与基的选取无关的. 因而，对于任一标准正交基，矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

总表示一个旋转，其角为 $2\pi/3$ 而其轴由向量 $(1,1,1)$ 所生成；注意到这个旋转是 3 阶的. 在 1.8.3.1 中我们实际上已用到 $f\in O^+(E)$ 的轴的唯一性.

8.4.7.2 3 维时的 $O^-(E)$. 根据 8.4.1，我们看到每个 $f\in O^-(E)$ 都由超平面对称 σ_H（这里 $\dim H=2$）加上一个以直线 $D=H^\perp$ 为轴的旋转所合成.

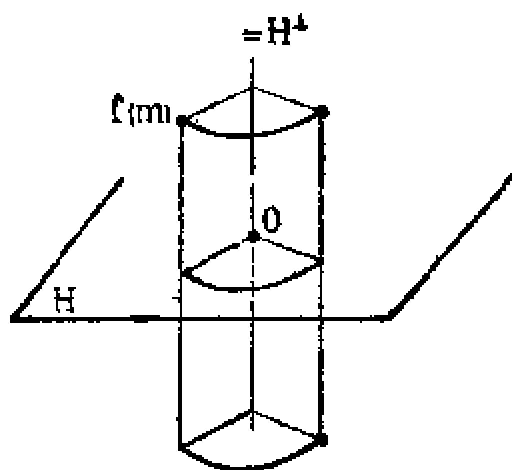


图 8.4.7.2.

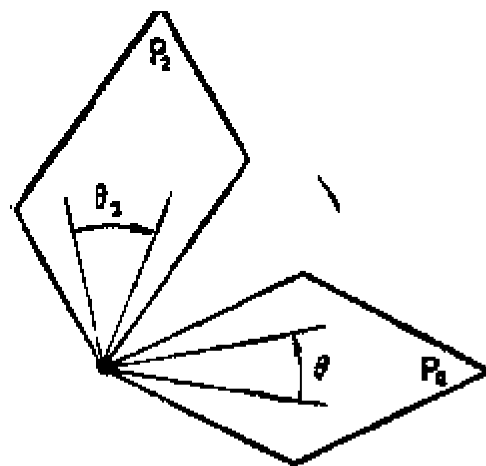


图 8.4.7.3.

8.4.7.3 $\dim E=4$ 的情形. 我们看到，除 $O^+(2)$ 的情形

（这时 $f\in O(E)$ 可以不容有任何特征向量），基本的情形按 8.4.1 的记法是

$$M(f)=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ 0 & 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\text{且 }\theta_1,\theta_2\notin\pi\mathbf{Z}.$$

两种比较极端的情形最有意思；其一是 $\theta_1=\theta_2$ 的情形，这就是在 1.2.9 和 4.3.6.2 中已遇到过的例子，第 18.8 节将专门对此进行讨论。

另一种情形是 θ_1,θ_2 按古希腊人的说法“不可公度”的情形，即 $\theta_1/\theta_2\notin\mathbf{Q}$，这里 $\mathbf{Q}$ 是有理数域。这时 $m\in E\backslash 0$ 在由 f 生成的群 $G=\{f^n:n\in\mathbf{Z}\}$ 的作用下的轨道是很值得考察的：它的闭包是 E 的微分子流形且微分同胚于一个环面；这一点在 18.9 中还会提起。图 8.4.7.4 表示的并非 f 的轨道，而是下述矩阵的旋转所成的群的轨道：

$$\begin{pmatrix}\cos t\theta_1 & -\sin t\theta_1 & 0 & 0\\ \sin t\theta_1 & \cos t\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos t\theta_2 & -\sin t\theta_2\\ 0 & 0 & \sin t\theta_2 & \cos t\theta_2\end{pmatrix}$$

其中 t 取遍 $\mathbf{R}$(θ_1,θ_2 固定且 $\theta_1/\theta_2\notin\mathbf{Q}$)。要注意的是，图 8.4.7.4 仅仅表示轨道及其闭包的拓扑型，而根本没有表示在四维空间 E 中的这一轨道(这道理是显然的)。

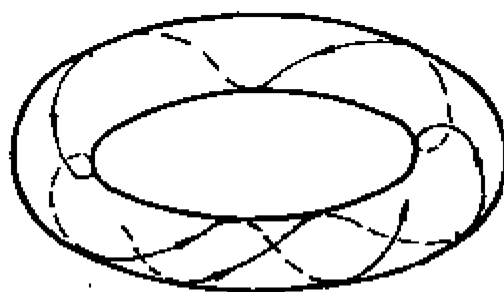


图 8.4.7.4.

8.5 $O(E)$ 的单性

这里提供一个典型的"几何代数"的例子，即通过几何证明来获得纯代数的性质；我们在 1.6.7.2 已碰到过这种情况，而整个第 13 章都将进行这样的讨论． 本书的基本精神是尽量利用代数的工具来研究几何，特别是有形可循的几何问题，上述的讨论仅仅是一种很短暂的逆向的插曲．

8.5.1 定理． 群 $O^+(3)$ 是单群，即它不容有任何非平凡的正规子群(非平凡指既非单位元素亦非整个群)．

仅须证明每一正规子群 $G \neq \mathrm{Id}$, $G \subset O^+(3)$ 至少含有一个中心对称；因若 g 是关于直线 D 的中心对称而 $f \in O^+(3)$，则 fgf^{-1} 是关于 $f(D)$ 的中心对称并仍属于 G． 然而 $O^+(3)$ 是在 $\mathbf{R}^3$ 的直线上可迁的（参见 8.2.7），因此 G 包含所有的中心对称，从而根据 8.4.6 它与 $O^+(3)$ 相同．

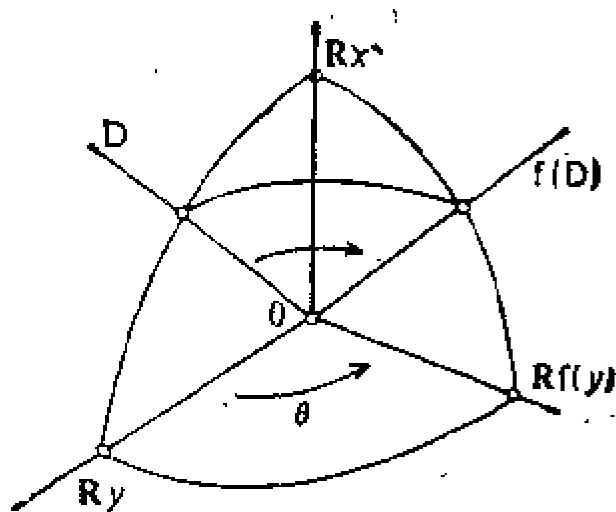


图 8.5.1.

任取 $f \in G$, $f \neq \mathrm{Id}_E$；则 f 是(参看 8.4.7.1)一个以 $\mathbf{R}_x$($x \in \mathbf{R}^3 \backslash 0$)为轴、以 $\theta \in]0,\pi[$ 为角的旋转(若 $\theta = \pi$, f 是中心对称)．由于 $f^n \in G$, $n \in \mathbf{N}$，必存在 n 使 $n\theta \in [\pi/2, \pi[$；所以不妨假定 $\theta \in]\pi/2, \pi[$．于是存在一直线 D，使 D 和 $f(D)$ 这两条直线是正交的；为了

说明这一点，可取 $\mathbf{R}^3$ 的坐标轴 $\{\mathbf{R}x, \mathbf{R}y, \mathbf{R}z\}$，其中 $\mathbf{R}x$ 是 f 的轴，$\mathbf{R}y$ 是任一与 $\mathbf{R}x$ 正交的轴，$\mathbf{R}z = \mathbf{R}f(y)$. 当直线 D 在平面 $\mathbf{R}x + \mathbf{R}y$ 上从 $\mathbf{R}y$ 变到 $\mathbf{R}x$ 时，D 和 $f(D)$ 的夹角从 $\theta > \pi/2$ 变到 0，从而在中间取到 $\pi/2$ 的值. 令 $g = \sigma_D$ 即关于 D 的中心对称，令

$$h = gfg^{-1}f^{-1} \in G;$$

h 在 $f(D)$ 上的作用是：

$$f(D) \ni m \underset{f^{-1}}{\longmapsto} f^{-1}(m) \underset{g^{-1}}{\longmapsto} f^{-1}(m) \underset{f}{\longmapsto} m \underset{g}{\longmapsto} -m \in f(D),$$

亦即 $h|_{f(D)} = -\mathrm{Id}_{f(D)}$，因此 h 必为(关于一条与 $f(D)$ 正交的直线的)一个中心对称(参看 8.4.7.1).

8.5.2 附注. 上述代数结论的证明中，毕竟用到了实数理论，特别是阿基米德公理来找出 n 使 $n\theta \geqslant \pi/2$，对此读者也许会感到不无遗憾. 其实，这是非用不可的，读者可以在 [AN] 第 179 页以后看到一个正交群的例子，这个群作用在一个赋有非阿基米德域上的正定二次形式的 3 维空间里，而它不是单群.

8.5.3 定理. $n \geqslant 5$ 时，群 $O^+(n)$ 关于其中心(参看 8.2.17)的商群是单群.

8.5.3.1 设 G 是 $O^+(n)$ 的正规子群，$f \in O^+(n) \setminus$ 中心. 我们的目的是借助于 f 作出一个形如 $g' \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Id}_V$ 的 $g \in G$，其中 $\dim V = n-3$，这一写法意味着有正交直和分解 $\mathbf{R}^n = V \overset{\perp}{\oplus} V^\perp$，$g' \in O^+(V^\perp)$ 而 g 则由 $V^\perp$ 上的 g' 与 V 上的恒等变换合成而得. 事实上，8.5.1 的证明中提供了 $V^\perp$ 中的一个中心对称，它与 V 上的恒等变换合成后即为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个中心对称并在 G 中，由此据 8.4.6 即可得 $G = O^+(n)$.

8.5.3.2 存在一个平面 P 使 $f(P) \neq P$，如若不然，$\mathbf{R}^n$ 的所有直线都在 f 下不变，从而 f 属于 $O^+(E)$ 的中心，参看 8.2.16. 设 S 是由 P 和 $f(P)$ 生成的子空间：$S = P + f(P)$；由于 $n \geqslant 5$ 就有 $S^\perp \neq \{0\}$. 考虑关于 $P^\perp$ 的中心对称：$h = \sigma_{P^\perp}$，令 $k = hfh^{-1}f^{-1}$，即 $k = \sigma_{P^\perp}\sigma_{f(P^\perp)}$，特别就有 $k|_{S^\perp} = \mathrm{Id}_{S^\perp}$ 及 $k \in G \setminus$ 中心. 固定

$x \in S^{\perp}\backslash 0$ 与 y，使

$$z = k(y) \neq y.$$

对每一 $u \in \mathbf{R}^n\backslash 0$，记 $t_u = \sigma_{u^\perp}$ 为关于超平面 $u^\perp$ 的超平面对称，则依次有：$l = t_y t_x \in O^+(n)$，

$$g = klk^{-1}l^{-1} \in G\backslash 中心$$

和
$$g = kt_y t_x k^{-1} t_x t_y = kt_y k^{-1} t_x t_x t_y = t_{k(y)} t_y = t_z t_y$$

(因为 $kt_x k^{-1} = t_{k(x)} = t_x$ 所以 $kt_x = t_x k$)．而 $g = t_z t_y$ 正好就是形如$g = g' \oplus \mathrm{Id}_V$ 的，其中 $\dim V^\perp = 3$ (其实现在 $V^\perp \subset S$)．

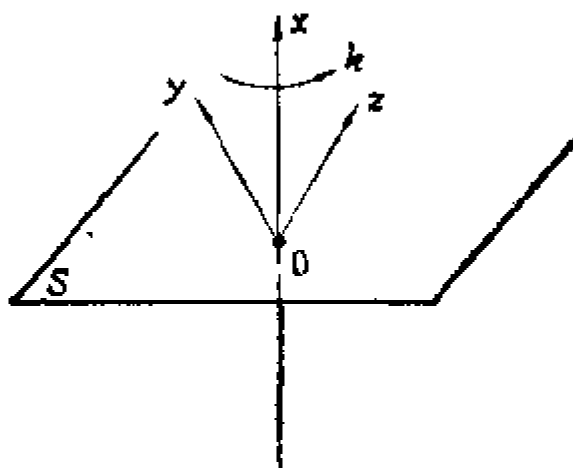


图 8.5.3.2.

8.5.3.3 $O(4)$ 情形如何呢？答案将在 8.9.10 中给出． 关于"典型群"的单性，基本的参考文献是 [DE1]；也可参看 13.6.8 和 13.7.14．

8.6 直线或半直线的交角

本节中 $\dim E \geq 2$.

这里讨论的是无向角，这是相对于欧氏平面中直线或半直线的定向角而言的概念，后者将在下节中讨论．本节中的(无向)角可以位于任意维的欧氏空间之中，其中包括平面的情况．另外，在这一章中仅涉及向量直线的讨论，仿射直线的情形要放在下一章

再讨论(参看 9.2.1)。

8.6.1 半直线，定向直线. 设 E 是任一实向量空间；E 的半直线就是 E 中形如 $\mathbf{R}_+^* x$, $x \in E \setminus 0$, 的子集，它们的全体记作 $\tilde{\mathscr{D}}(E)$. E 中向量直线的全体，亦即 Grassmann 流形 $G_{E,1}$, 现在记作 $\mathscr{D}(E)$；我们有一个映射 $p: \tilde{\mathscr{D}}(E) \to \mathscr{D}(E)$, 它的每一逆像都含有两个元素.

确切地说，若 $\Delta \in \tilde{\mathscr{D}}(E)$, 则其反向半直线 $-\Delta$ 使得

$$p(-\Delta) = p(\Delta) = \mathbf{R}x \quad \forall x \in \Delta.$$

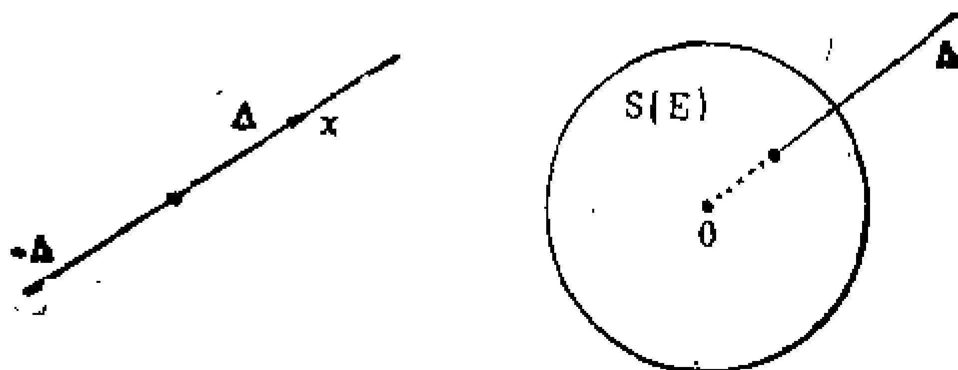


图 8.6.1.

我们还记得，$\mathscr{D}(E)$ 就是射影空间 $P(E)$ (参看 4.1.3.4)；至于 $\tilde{\mathscr{D}}(E)$, 如果 E 是欧氏空间的话，也可有一个很方便的解释，因为 $x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$ 确定了一个双射 $\tilde{\mathscr{D}}(E) \to S(E)$, 其中 $S(E)$ 是 E 的单位球面. 即使在一般情形下，在 $\tilde{\mathscr{D}}(E)$ 和带有定向的 E 中的向量直线全体所成的集合之间总存在着等价关系.

8.6.2 下述定义的根据，一是角的测度(参看 8.3.7, 8.3.11), 另一是 8.6.6.

8.6.3 定义. 设 E 是欧氏向量空间，

$$\Delta, \Delta' \in \tilde{\mathscr{D}}(E), \quad D, D' \in \mathscr{D}(E),$$

则

(i) 数量 $\frac{|(x|x')|}{\|x\|\|x'\|}$ 只与 D, D' 有关，而与 $x\in D\backslash 0$, $x'\in D'\backslash 0$ 无关. D 和 D' 的(无向) 交角，记作 $\overline{DD'}$ 或 $\overline{D,D'}$，就是如下定义的 $[0,\pi/2]$ 中的实数(参见 8.3.11)

$$\overline{DD'} = \text{Arc}\cos\left(\frac{|(x|x')|}{\|x\|\|x'\|}\right),\quad x\in D\backslash 0,\quad x'\in D'\backslash 0.$$

(ii) 数量 $\frac{(x|x')}{\|x\|\|x'\|}$ 只与 Δ, Δ' 有关，而与 $x\in\Delta\backslash 0$, $x'\in\Delta'\backslash 0$ 无关. Δ 和 Δ' 的(无向)交角，记作 $\overline{\Delta\Delta'}$ 或 $\overline{\Delta,\Delta'}$，如下定义为 $[0,\pi]$ 中的实数

$$\overline{\Delta\Delta'} = \text{Arc}\cos\left(\frac{(x|x')}{\|x\|\|x'\|}\right).$$

8.6.4 换一种说法:

$$\cos(\overline{DD'}) = \frac{|(x|x')|}{\|x\|\|x'\|},\quad \cos(\overline{\Delta\Delta'}) = \frac{(x|x')}{\|x\|\|x'\|}.$$

根据 8.3.11，只须验证 $\frac{(x|x')}{\|x\|\|x'\|}\in[-1,1]$ 即可，这已见于8.1.3.

8.6.5 附注. 由 8.1.3 可知: $\overline{DD'}=0$ (相应地，$\overline{\Delta\Delta'}=0$)等价于 $D=D'$ (相应地，$\Delta=\Delta'$)；而 $\overline{\Delta\Delta'}=\pi$ 等价于 $\Delta'=-\Delta$, $\overline{\Delta\Delta'}=\pi/2$ (或 $\overline{DD'}=\pi/2$) 等价于 Δ 和 Δ' (或 D 和 D') 正交.

这些交角都是遗传的: 若 $F\subset E$ 是包含 Δ,Δ' 的子空间，则在 F 中来看也好，在 E 中来看也好，交角 $\overline{\Delta\Delta'}$ 总是相同的. 对 $\mathscr{D}(E)$亦然.

$\tilde{\mathscr{D}}(E)$ 上或 $\mathscr{D}(E)$ 上的交角，都满足两条距离公理；在9.9.8, 18 和 19.1 中我们还会进一步看到它们确实就是距离. 对 $\tilde{\mathscr{D}}(E)$ 而言，这是球面 $S(E)$ 上的内蕴距离，对 $\mathscr{D}(E)$ 而言则涉及射影空间 $P(E)$ 上的椭圆几何.

8.6.6 命题. 如果 $O(E)$ 以 $g(\cdot,\cdot)=(g(\cdot),g(\cdot))$ 的平凡方式作用在 $\tilde{\mathscr{D}}^2(E)$ 和 $\mathscr{D}^2(E)$ 上，则:

(i) 对于 $O(E)$ 的作用：(D, D') 和 (D_1, D_1') 属于同一轨道的充要条件是 $\overline{DD'} = \overline{D_1D_1'}$，$(\Delta, \Delta')$ 和 (Δ_1, Δ_1') 属于同一轨道的充要条件是 $\overline{\Delta\Delta'} = \overline{\Delta_1\Delta_1'}$；

(ii) 对于 $O^+(E)$ 的作用，(i) 的两点结论在 $\dim \geqslant 3$ 时仍成立，但在 $\dim E = 2$ 时都不成立。

换句话说，我们已将 $\tilde{\mathscr{D}}^2(E)$（相应地，$\mathscr{D}^2(E)$）中 $O(E)$ 的轨道用 $[0, \pi]$（相应地，$[0, \pi/2]$）中的一个实数来作为参数；而且当 $\dim E \geqslant 3$ 时 $O^+(E)$ 的轨道全体跟 $O(E)$ 的相同。

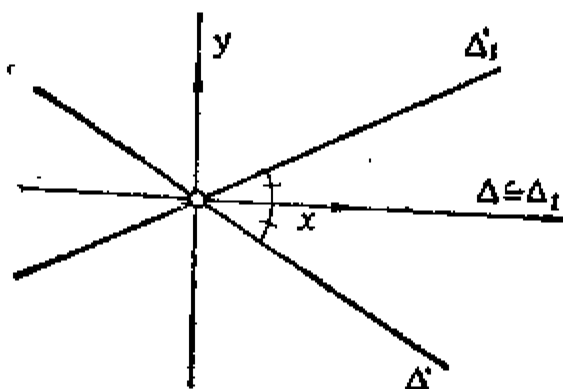


图 8.6.6.

我们对 $\tilde{\mathscr{D}}(E)$ 的情形进行讨论，直线的情形不会有更多的困难。根据 8.2.7，不妨假定 $\Delta, \Delta', \Delta_1, \Delta_1'$ 都在 E 的同一平面内，而且 $\Delta = \Delta_1$；取该平面的正交基 $\{x, y\}$，使 $x \in \Delta = \Delta_1$，$x' \in \Delta'$，$x_1' \in \Delta_1'$，且 $\|x'\| = \|x_1'\| = 1$. 根据 $\overline{\Delta\Delta'}$ 和 $\overline{\Delta_1\Delta_1'}$ 的定义，两向量 x' 和 x_1' 有相同的 x 坐标；由于它们的模都是 1，它们的 y 坐标或是相等或是互为相反数. 若相等，则 $\Delta' = \Delta_1'$，命题得证；若互为相反数，则对称 σ_Δ 满足

$$\sigma_\Delta(\Delta') = \Delta_1'.$$

若 $\dim E \geqslant 3$，这一 σ_Δ 可延拓为 E 的中心对称. 若 $\dim = 2$，则图示的情形提供了反例.

8.6.7 问题. 这样，一个 $[0, \pi/2]$ 上的数量可以用来表征至少彼此等距的一对直线；对 E 的两个维数给定的子空间 (V, W)，

也可提出同样的问题．对于 $\dim = 3$，可用 $[0, \pi/2]$ 上的一个数量很方便地进行分类：若 $\dim V = \dim W = 2$，取正交直线 $V^{\perp}$，$W^{\perp}$ 的交角．若 $\dim V = 1$，$\dim W = 2$，取 $\inf\{\overline{VD}: D \subset W\}$（而且，这一下界可由直线 V 和 V 在 W 上的正交投影来实现）．

但从 $\dim = 4$ 起，典型的情形是 $\dim V = \dim W = 2$，不可能再用一个实参数来对 $O(E)$ 的作用下的轨道进行分类．在 [FL] 第 310—316 页可以找到最一般情况下的这一问题的完整答案．

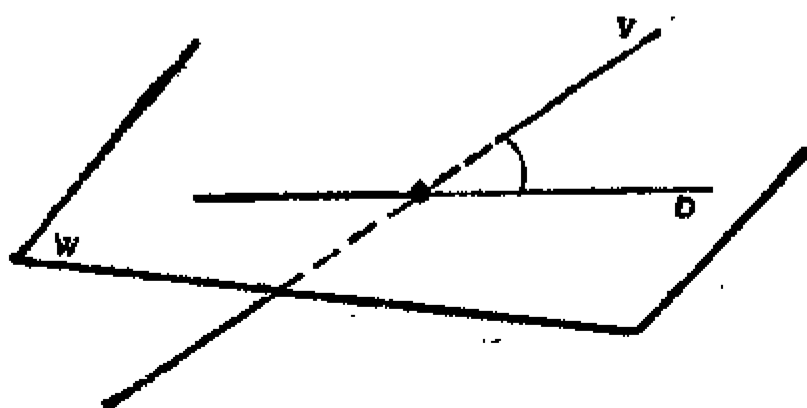


图 8.6.8.

8.7 平面上的定向角

本节中 $\dim E = 2$．

8.7.1 8.6.6 (ii) 表明，当 E 是欧氏平面时，为了对 $\mathscr{D}^2(E)$ 或 $\mathscr{D}^2(E)$ 在 $O^+(E)$ 下的轨道进行分类，交角（在 $[0,\pi]$ 或 $[0,\pi/2]$ 内）已不够用了；必须引进一个更精细的不变量．下面将要叙述的理论，对讨论简单的直线交角来说显得过于抽象，但既然不存在一种更直观更简捷的理论，那么从这一意义上说我们的叙述就是不可避免的了；要能信服这一点，读者可以参阅 [FL] 第 160—186 页．为了看出叙述清晰的好处，读者也可参阅诸如 [IR]，[DC1]

这样的旧文献，其中在定向角的关系中引进了“mod$k\pi$”和“mod$2k\pi$”。

花费如此代价得到的更精细的不变量，即定向角的概念，使我们能在以下几章中得出许多巧妙而简洁的结果：可参看10.9.

8.7.2 定向直线的定向角

8.7.2.1 由于$O^+(E)$在$\tilde{\mathscr{D}}^2(E)$上单可迁(参看8.3.3)，存在一个映射，记作$\Phi:\tilde{\mathscr{D}}^2(E)\to O^+(E)$. 这一映射在$\tilde{\mathscr{D}}^2(E)$上确定了一个等价关系(有同一像点的那些点)；另一方面，$O^+(E)$在$\tilde{\mathscr{D}}^2(E)$上的作用也确定另一等价关系，以轨道为等价类（参看1.6). 有趣的是：

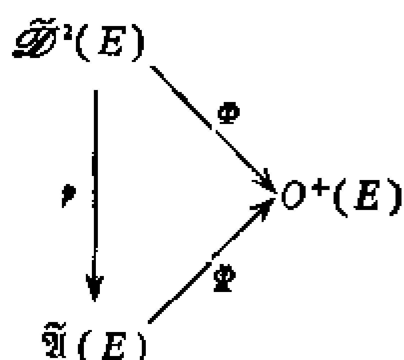
8.7.2.2 引理. 上述两个等价关系是相同的.

第一个是$(\Delta,\Delta')\sim(\Delta_1,\Delta_1')$如果$\exists g\in O^+(E)$使$\Delta'=g(\Delta)$且$\Delta_1'=g(\Delta_1)$，第二个是$\exists f\in O^+(E)$使$\Delta_1=f(\Delta)$且$\Delta_1'=f(\Delta')$. 由于$O^+(E)$是交换群，两者是相同的.

因而我们可以径直定义商集$\tilde{\mathfrak{A}}(E)=\tilde{\mathscr{D}}^2(E)/\mathscr{R}$而无须说明用的是两个等价关系中的哪一个；另外再定义典范射影

$$\Phi:\tilde{\mathscr{D}}^2(E)\to\tilde{\mathfrak{A}}(E)$$

以及Φ在商集上诱导的映射$\underline{\Phi}:\tilde{\mathfrak{A}}(E)\to O^+(E)$. 因$\Phi$是满射，故$\underline{\Phi}$由定义是双射.



8.7.2.3 定义. $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$称为E中定向直线的定向角集合；从$O^+(E)$的群结构可以由$\underline{\Phi}$诱导出$\tilde{\mathfrak{A}}(E)$的群结构，记作加法. $\Delta,\Delta'\in\tilde{\mathscr{D}}(E)$的定向角就是$p((\Delta,\Delta'))$；记之为$\widehat{\Delta\Delta'}$或$\widehat{\Delta,\Delta'}$.

下面列举定向角的一些有用的性质，其中大部分或则是上述内容换个形式的表达，或则是显而易见的.

8.7.2.4 性质. 对任何定向直线:

(1) $\Delta'=f(\Delta)$, $f\in O^+(E)\Longleftrightarrow\Phi(\widehat{\Delta\Delta'})=f$, 特别有

$$\widehat{\Delta\Delta'}=0\Longleftrightarrow\Delta=\Delta';$$

(2) $\widehat{\Delta\Delta'}=\widehat{\Delta_1\Delta_1'}\Longleftrightarrow\exists f\in O^+(E)\mid f(\Delta)=\Delta_1$ 且 $f(\Delta')=\Delta_1'$;

(3) $\widehat{\Delta\Delta'}=\widehat{\Delta_1\Delta_1'}\Longleftrightarrow\widehat{\Delta\Delta_1}=\widehat{\Delta'\Delta_1'}$;

(4) $\widehat{\Delta\Delta'}+\widehat{\Delta'\Delta''}=\widehat{\Delta\Delta''}$ (Chasles 关系式), 特别有 $\widehat{\Delta'\Delta}=-\widehat{\Delta\Delta'}$;

(5) $\forall f\in O^+(E)$ (相应地, $O^-(E)$): $\widehat{f(\Delta)f(\Delta')}=\widehat{\Delta\Delta'}$ (相应地, $-\widehat{\Delta\Delta'}$).

其中唯一不能从定义和 8.7.2.2 引出的性质是(5)中 $f\in O^-(E)$ 的情形,但它可直接由 8.3.5 导出。

8.7.2.5 注. 所以,若为定义定向角,则无须将 E 定向;但若想度量定向角,则必须将 E 定向。

读者以后还会在仿射空间中遇到上述某些性质: Chasles 关系式,平行四边形法则 ($\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{cd}\Longleftrightarrow\overrightarrow{ac}=\overrightarrow{bd}$), 并且将会发现这些性质对所有的单可迁交换群都成立.

8.7.3 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 中以 2 相除; 平分线. 这里的问题是在群 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 中求解方程 $2x=a$. 我们先来求解方程 $2x=0$, 或即 $O^+(E)$ 中的 $f^2=\mathrm{Id}_E$. 若

$$M(f)=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix},$$

由 8.3.4 就有 $a^2=1$, 从而 $a=\pm1$, 而 $b=0$, 即 $f=\pm\mathrm{Id}_E$. 利用 8.2.9 提供的对合构造也可以看到这一点.

8.7.3.1 命题. 方程 $2x=0$ 恰有两个解 0 和 $\Phi^{-1}(-\mathrm{Id}_E)$; 这一定向角记作 ϖ 并称作平角. 我们有 $\widehat{\Delta\Delta'}=\varpi\Longleftrightarrow\Delta'=-\Delta$, 这里 $-\Delta$ 表示 Δ 带有另一方向所定义的半直线.

最后, 8.7.3.1 的第三种证明可由下述定义导出.

8.7.3.2 定义. 凡能使 $\widehat{\Delta\Sigma}=\widehat{\Sigma\Delta'}$ 的定向直线 Σ，都称为定向直线 Δ 与 Δ' 的平分线.

根据 8.7.2.4 (4) 和 (5)，说 Σ 是 Δ 和 Δ' 的平分线就等价于说关于 Σ 的对称 σ_Σ (参见 8.2.9) 满足 $\sigma_\Sigma(\Delta)=\Delta'$. 但 8.2.11 的讨论表明支撑 Σ 使 $\sigma_\Sigma(\Delta)=\Delta'$ 的直线是唯一的，因为一条定向直线容有唯一的正单位向量. 因此 Δ，Δ' 恰有两条反向的平分线 $\pm\Sigma$. 最后由 $\widehat{\Delta\Sigma}=\widehat{\Sigma\Delta'}$ 可推出 $\widehat{\Delta\Delta'}=2\hat{\Delta}\Sigma$，由此即得:

8.7.3.3 命题. 两条定向直线 Δ,Δ' 恒有两条平分线，位于同一直线上而方向相反. 对任一 $a\in\tilde{\mathfrak{A}}(E)$，方程 $2x=a$ 恰有两个

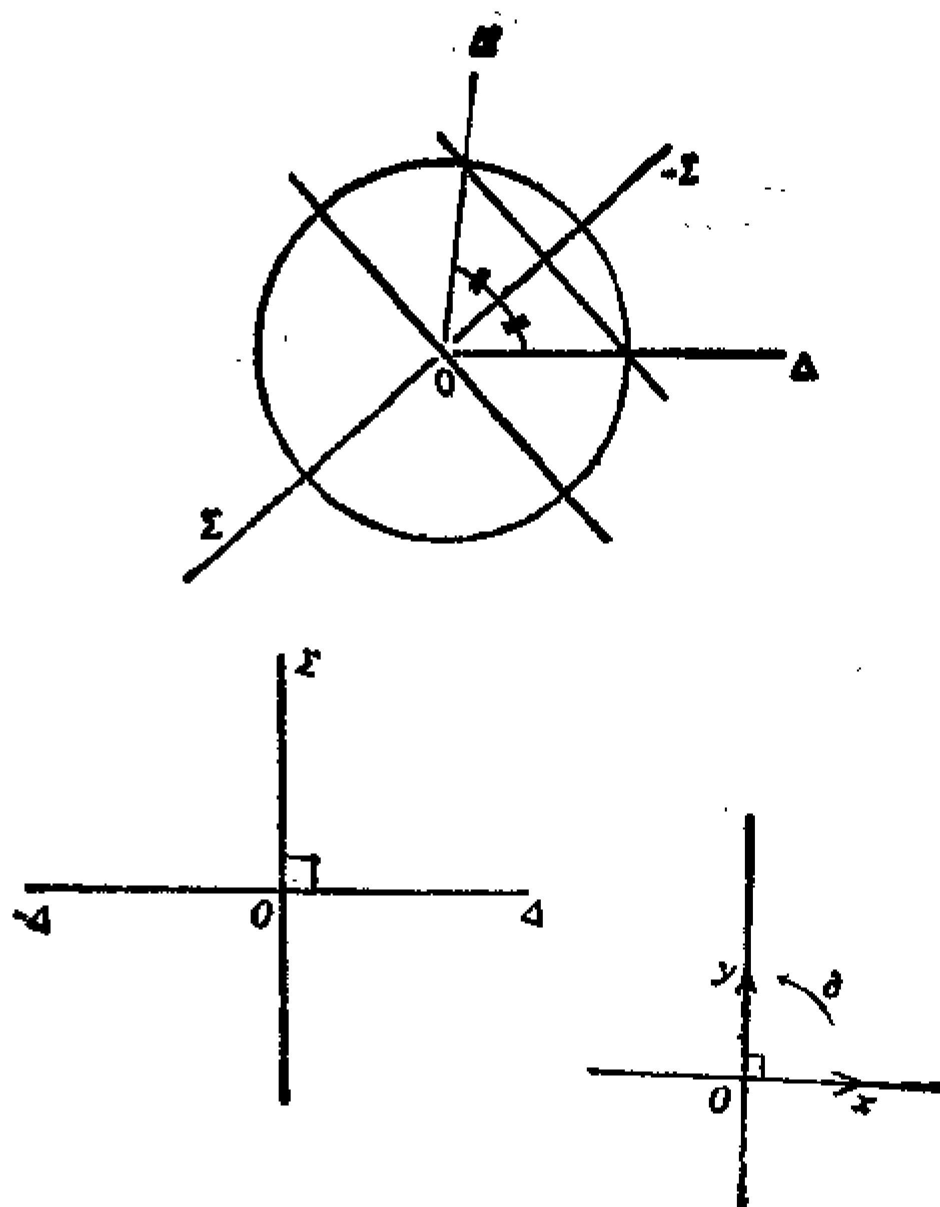


图 8.7.3.3.

解，形如 $\{b, b+\varpi\}$. 若 $\widehat{\Delta\Delta'}=a$，则 $2x=a$ 的 x 解由 Δ 和 Δ' 的平分线 Σ 通过 $x=\widehat{\Delta\Sigma}$ 的关系式给出.

8.7.3.4 方程 $2x=\varpi$ 所起的作用是很有趣的，因为若 x 使得 $2x=\varpi$ 且 $\widehat{\Delta\Delta'}=x$，则 Δ, Δ' 所在的那两条直线相互正交，反之亦然. 要说明这一点，可利用矩阵及 8.3.4：由 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$，应有 $a=0$，从而 $b=\pm 1$；或者从几何上看，注意到两条直线 Δ 和 $-\Delta$ 的平分线是与 Δ 正交的，这是因为 Δ 所在的直线 D 应在 σ_{Σ} 下不变并异于 Σ. 此外，$2x=\varpi$ 的解与 E 的定向的关系如下：

8.7.3.5 命题. $2x=\varpi$ 的解称为 $\mathfrak{A}(E)$ 的直角. 取定其中的一个直角，就等价于取定 E 的定向如下：若 ∂ 是取定的直角，则标准正交基 $\{x, y\}$ 为正的充要条件是 $y=\underline{\Phi}(\partial)(x)$.

注意，这里的 ∂ 是完全和 8.3.12 中一致的.

8.7.4 E 定向的情形；定向角的测度. 本段 8.7.4 中假设 E 是定向欧氏平面，并利用 8.3.6 和 8.3.9 给出：

8.7.4.1 定义. 对 $\widetilde{\mathfrak{A}}(E)$ 中一个定向角 α，将 $\underline{\Phi}(\alpha)$ 的任一测度，即 $A^{-1}(\Theta(\underline{\Phi}(\alpha)))$ 的任一元素，称为 x 的测度（一个测度）.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \mathbf{R} \\ & & & & \downarrow A \\ \widetilde{\mathfrak{A}}(E) & \xrightarrow[\underline{\Phi}]{} & O^{+}(E) & \xrightarrow[\Theta]{} & \mathbf{U} \end{array}$$

8.7.4.2 例. ϖ 的一个测度是 π，∂ 的一个测度是 $\pi/2$. 若 t 是 α 的一个测度，则 α 的所有其它测度都形如 $t+2k\pi$，其中 $k\in\mathbf{Z}\backslash 0$.

借助于测度，可以来说明对任何整数 $n\geqslant 1$ 和任何 $a\in\widetilde{\mathfrak{A}}(E)$，方程 $nx=a$ 在 $\widetilde{\mathfrak{A}}(E)$ 中恰有 n 个不同的解：参见 8.12.7.

8.7.5 $\overline{\Delta\Delta'}$ 与 $\widehat{\Delta\Delta'}$ 的比. 下面假设 E 是定向的；若 E 事先并未定向，则出于我们的需要应将它定向. 设 Δ, Δ' 是两条定向直线，而且在这里不妨都看作半直线（参见 8.6.1）；则 $\widehat{\Delta\Delta'}$ 总有一个属于

$[0,2\pi[$ 的测度。另一方面，$(\Delta,\ \Delta')$ 通过 $\{x,\ x'\}$，其中 $x\in\Delta$，$x'\in\Delta'$，定义的标架，或都是正的，或都是负約（$\Delta'=\pm\Delta$ 的情形排除在外）。

8.7.5.1 命题. 设 t 是 $\widehat{\Delta\Delta'}$ 在 $[0,2\pi[$ 内的测度，则若 (Δ,Δ') 所定义的标架是正的（相应地，负的），就有 $t\in[0,\ \pi[$（相应地，$t\in[\pi,2\pi[$）和 $\overline{\Delta\Delta'}=t$（相应地，$\overline{\Delta\Delta'}=2\pi-t$），其中不包括 $\Delta=\Delta'$，$t=0$ 和 $\Delta=-\Delta$，$t=2\pi-t=\pi$ 这两种平凡的情形。

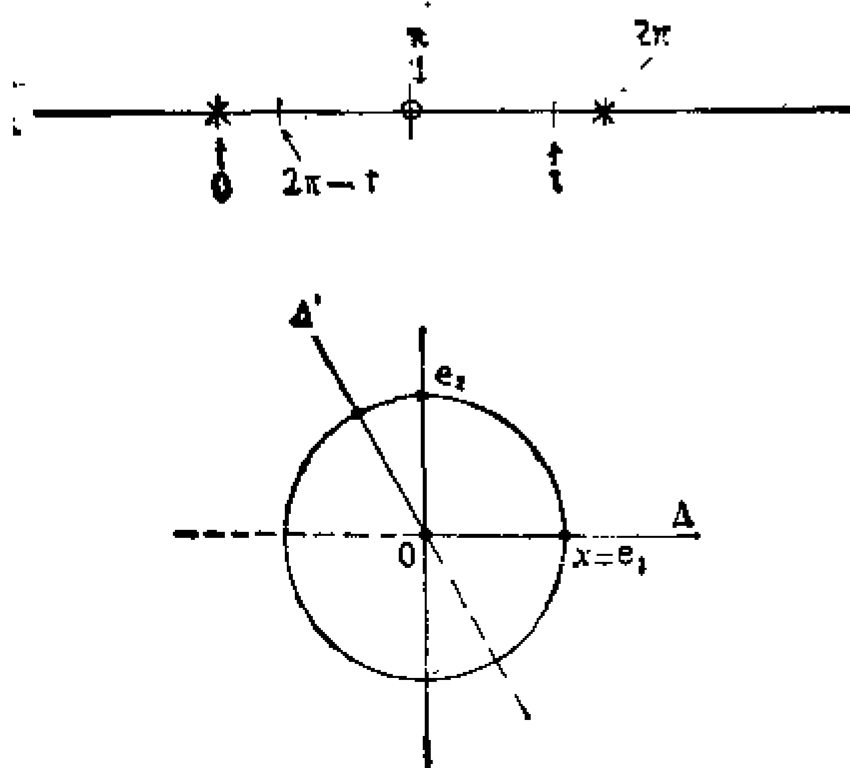


图 8.7.5.1.

后两种情形是平凡的：因此我们总可假定 $\Delta'\neq\pm\Delta$. 若改变定向，则 $\Delta\Delta'$ 改变符号，从而 t 变成 $2\pi-t$；因而总不妨在正标架的假设下进行证明. 确切地说，设 $x\in\Delta$，$x'\in\Delta'$ 都是单位向量，$\{e_1=x,e_2\}$ 是第一个向量 x 的标准正交正基. 关键在于 x' 关于 e_2 的坐标是正的，而该坐标就是 $\sin t$，因而 $t\in]0,\ \pi[$，利用 8.3.11 即得证。

8.7.5.2 定义. 设 $\Delta, \Delta', \Delta''$ 是一个(不必定向的)欧氏平面上的三条直线；若满足下列条件之一，则称 Δ' 介于 Δ 和 Δ'' 之间：若 $\Delta = \Delta''$，则 $\Delta' = \Delta = \Delta''$，若 $\Delta'' = -\Delta$，无须任何条件，若 $\Delta'' \neq \pm\Delta$，则 Δ' 要属于 Δ 所定义并包含 Δ'' 的半平面与 Δ'' 所定义并包含 Δ 的半平面的交集.

8.7.5.3 推论. 设 Δ' 介于 Δ 和 Δ'' 之间，则 $\overline{\Delta\Delta'} + \overline{\Delta'\Delta''} = \overline{\Delta\Delta''}$.

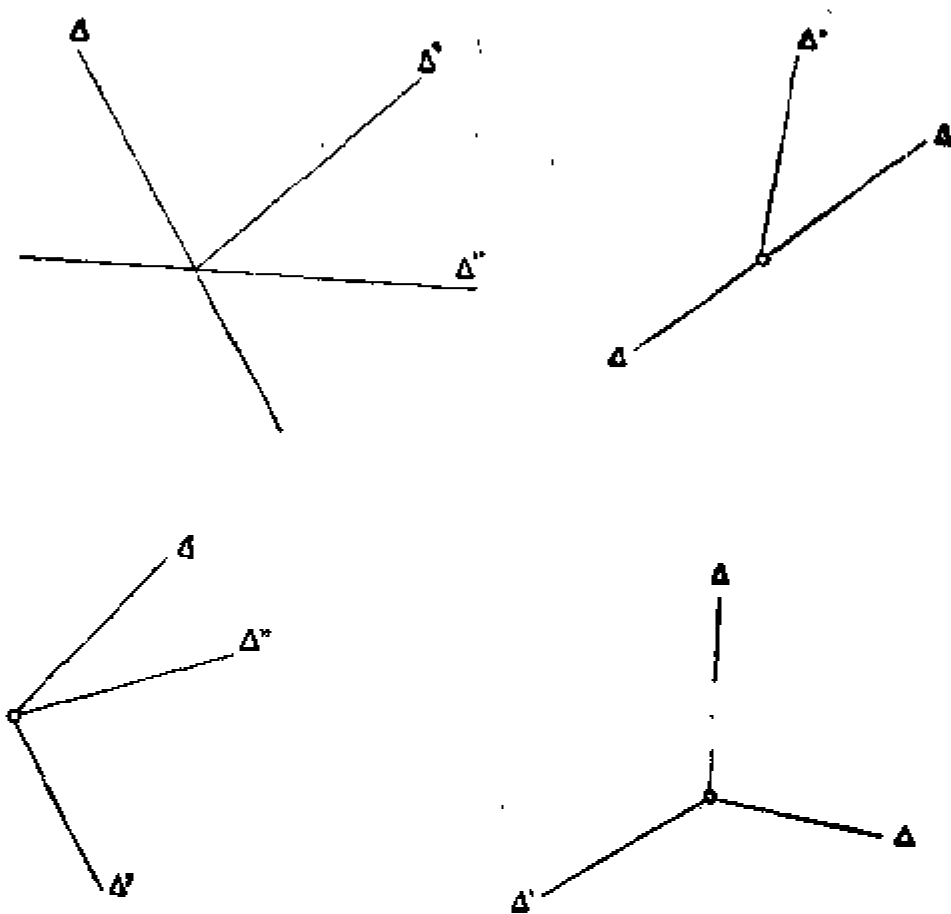


图 8.7.5.3.

三条半直线各不相同时，结论并不显然；这时，取 E 的定向使 (Δ,Δ') 所定义的标架为正，假设条件表明 (Δ',Δ'') 和 (Δ,Δ'') 的情形也是如此($\Delta'' = -\Delta$ 的情形除外). 设 s, t 是 $\widehat{\Delta\Delta'}, \widehat{\Delta'\Delta''}$ 在 $[0,2\pi[$ 内的测度；由 8.7.5.1 可知 $t \in [0,\pi[$ 和 $s = \overline{\Delta\Delta'}, t = \overline{\Delta'\Delta''}$. 但 $s+t$ 是 $\widehat{\Delta\Delta''}$ 的一个测度且 $s+t \in [0,2\pi[$；若 $\Delta'' = -\Delta$，则

$s+t=\pi$，若 $\Delta''\neq-\Delta$，则我们已知 (Δ,Δ'') 所定义的标架是正的，因此由 8.7.5.1 有 $s+t=\overline{\Delta\Delta''}$，推论得证.

8.7.5.4 推论 8.7.5.3 很重要，它可以直观地表达如下：就"角"这个词儿的真实的、物理的意义而言，我们可以把无向角 $\overline{\Delta\Delta'}$ 表示为由 Δ 和 Δ' 所定义的扇形的测度，若 $\Delta'=-\Delta$（Δ 任意），则该扇形成为半平面，若 $\Delta'\neq-\Delta$，则是介于 Δ 和 Δ' 之间的半直线的集合。若 Δ' 介于 Δ 和 Δ'' 之间，则由 Δ 和 Δ'' 所定义的扇形是 Δ,Δ' 所定义的扇形与 Δ',Δ'' 所定义的扇形的并集。另一种表示法则将一个扇形跟该扇形在 E 的单位圆 $S(E)$ 上截得的圆弧联系起来；8.7.5.3 说明圆弧的长度是组成该圆弧的两段圆弧长度的和。我们以后还会对 8.6.5 中提出的这种观点进行充分的讨论；请参阅 9.9.8. 关于扇形可参阅 [DE2] 第 79—82 页，或 [FL] 第 183 页.

8.7.6 附注. 上述内容表明了角的测度的困难所在：两个扇形的并集并不一定是扇形（图 8.7.5.3），因而若无基本的限制，加法就无法进行；对此亦可参阅 [FL] 第 185—186 页. 我们可以构造一种很有趣的结构，即 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)\backslash\varpi$ 上的序的关系；用非内蕴的观点，可将 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 看作一个圆（参阅 8.3.6）并由 ϖ 出发将它球极射影（参见 18.1.4）到 $\mathbf{R}$ 上，由此可得出 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)\backslash\varpi$ 与 $\mathbf{R}$ 之间的一个双射，从而可将 $\mathbf{R}$ 的序关系推衍到 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)\backslash\varpi$ 上. 关于更详细的论述，可参看 [FL] 第 176 页，或 [DE2] 第 117 页，也可利用 A 在 $]-\pi,\pi[$ 上的限制.

8.7.7 直线的定向角

8.7.7.1 本段中将对直线和 $\mathscr{D}^2(E)$ 作相仿的讨论；由于这种讨论并无多大困难，我们只是很快地、不加证明地在行文中给出种种结果. 它们都建立在两个等价的事实的基础上：一条直线 D 恰好定义两条反向的定向直线（其中并无哪一条先天地应取为正向），群 $O^+(E)$ 在 $\mathscr{D}^2(E)$ 上不再是单可迁的，但商群

$$PO^+(E)=O^+(E)/\{\mathrm{Id}_E,-\mathrm{Id}_E\}$$

却是单可迁的. $PO^+(E)$ 的记号意指"正交射影群"，因为 $\mathscr{D}(E)\cong$

$P(E)$；在 14.7.2 和 19.1 中还将对这种正交射影群进行充分的讨论。

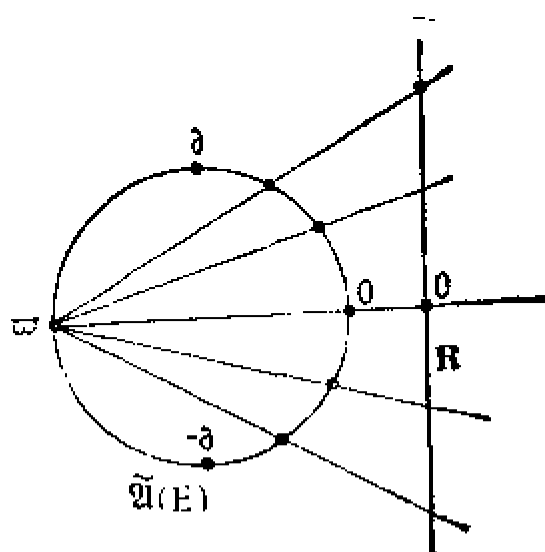
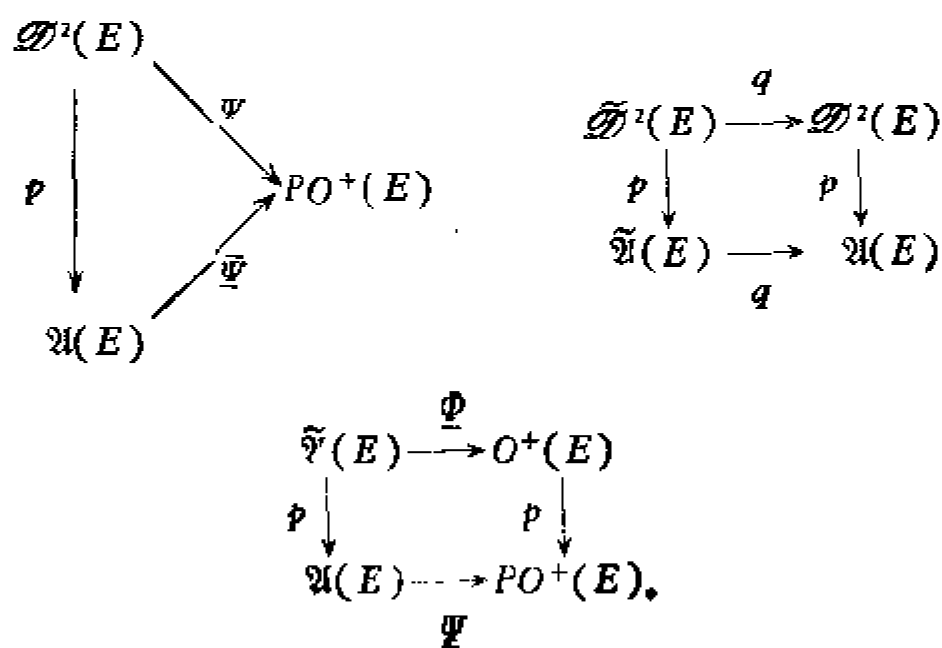


图 8.7.6.

8.7.7.2 群 $PO^+(E)=O^+(E)/\{\pm \mathrm{Id}_E\}$ 在 $\mathscr{D}^2(E)$ 上单可迁；若 Ψ 表示与之相应的映射，则 Ψ 在 $\mathscr{D}^2(E)$ 上定义的等价关系就是 Ψ 在 $\mathscr{D}^2(E)$ 上作用轨道所定义的等价关系。记商集为 $\mathscr{D}^2(E)/\mathscr{R}=\mathfrak{A}(E)$，$p:\mathscr{D}^2(E)\to\mathfrak{A}(E)$ 为典范投影而 $\underline{\Psi}$ 为诱导映射 $\mathfrak{A}(E)\to PO^+(E)$；则 $\underline{\Psi}$ 是双射：



若 $q:\tilde{\mathscr{D}}^2(E)\to\mathscr{D}^2(E)$ 是由也记为 q 的映射 $q:\tilde{\mathscr{D}}(E)\to\mathscr{D}(E)$ 诱导的，其中后一映射将一条定向直线与它所在的直线联系了起来，则上图是交换图。

我们通过 ψ 由 $PO^+(E)$ 的群结构诱导出 $\mathfrak{A}(E)$ 上的交换群结构，并称之为 E 中直线的**定向角群**。$D,D'\in\mathscr{D}(E)$ 的**定向角**是 $p((D,D'))\in\mathfrak{A}(E)$，记作 $\widehat{DD'}$ 或 $\widehat{D,D'}$。

8.7.7.3 对任何直线有：

$$\widehat{DD'}=\widehat{D_1D_1'}\Longleftrightarrow\widehat{DD_1}=\widehat{D'D_1'};\ \widehat{DD'}+\widehat{D'D''}=\widehat{DD''};$$

$$\widehat{D'D}=-\widehat{DD'};$$

$$\forall f\in O^{\pm}(E):\widehat{f(D)f(D')}=\pm\widehat{DD'};$$

$$\widehat{DD'}=0\Longleftrightarrow D=D'.$$

8.7.7.4 方程 $2x=0$ 在 $\mathfrak{A}(E)$ 中有两个解，一个是 0，另一个称为**直角**，记作 δ。我们有：$\widehat{DD'}=\delta\Longleftrightarrow D$ 与 D' 正交(在 8.1.8.3 的意义下)；δ 是 $\tilde{}(E)$ 中两个直角在 q 下的像。方程 $2x=a$ 在 $\mathfrak{A}(E)$ 中恒有两个解，形如 $\{x,x+\delta\}$；若 $a=\widehat{DD'}$，则使 $x=\widehat{DS}$ 和 $2x=\widehat{DD'}$ 的所有直线 S 是两条正交的直线，称为 D 和 D' 的**平分线**，它们由如下特征所刻划：$\widehat{DS}=\widehat{SD'}$ 或 $\sigma_S(D)=D'$。

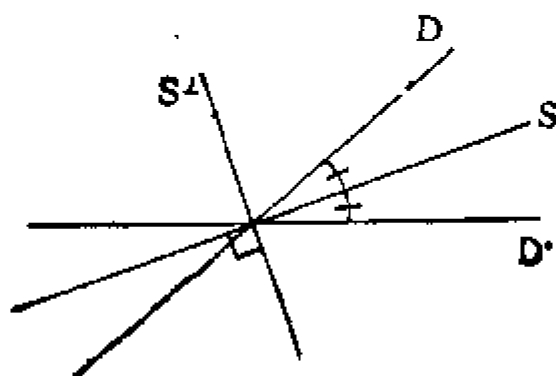
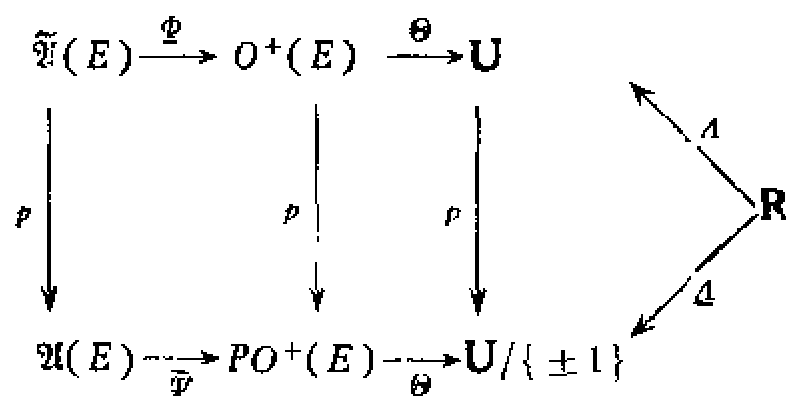


图 8.7.7.4.

8.7.7.5 设 D, D', S, S' 是四条直线，使得在射影直线 $P(E^*)$ 上有 $[D, D', S, S'] = -1$，则 $D \perp D'$ 等价于 S, S' 以 D, D' 作为平分线。

8.7.7.6 若要度量直线的交角(定向角)，必须将 E 定向；因而定义 $\underline{\Theta}$ 和 $\underline{\Lambda}$ 如下图所示（参见 8.3.6, 8.3.7, 8.7.4），其中 $\underline{\Lambda} = p \circ \Lambda$。作为定义，$a \in \mathfrak{A}(E)$ 的一个测度是指 $\underline{\Lambda}^{-1}(\underline{\Theta}(\underline{\varphi}(a)))$ 的任一元素，$\mathfrak{A}(E)$ 的一个元素的所有测度都形如 $t + \pi k, k \in \mathbf{Z}$；0 的一个测度是 0，$\delta$ 的一个测度是 $\pi/2$。



设 $D, D' \in \mathscr{D}(E)$，E 已定向而且 $D \neq D'$；则 $\widehat{DD'}$ 在 $]0, \pi[$ 中有唯一的测度 t 而且：或 $\overline{DD'} = t$，或 $\overline{DD'} = \pi - t$（参见 8.6.6）。若 D，D' 不正交，则存在 E 的唯一定向使 $t \in]0, \pi/2[$。值得注意的是在 $\mathscr{D}(E)$ 中不可能有推论 8.7.5.3；例如，若 D, D', D'' 是如图 8.7.7.5 所示的三条直线，则有

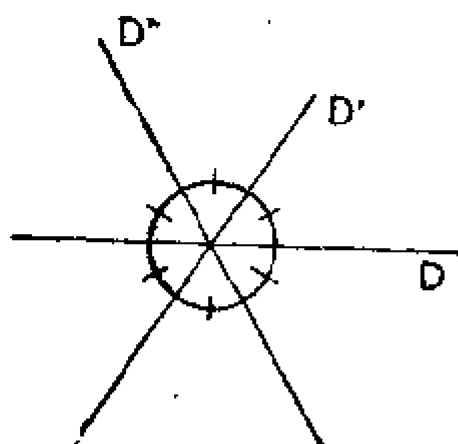


图 8.7.7.5.

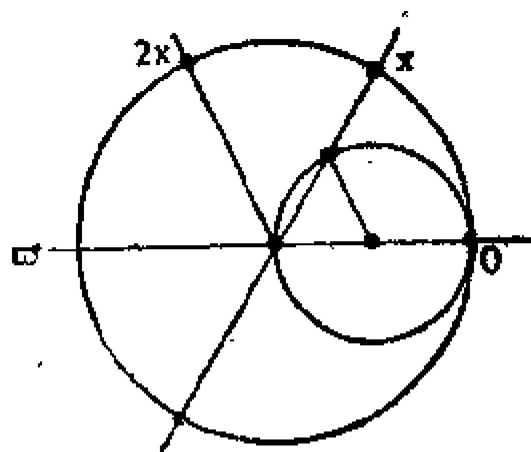
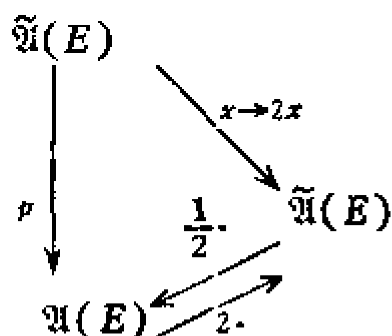


图 8.7.7.6.

$$\overline{DD'}=\overline{D'D''}=\overline{DD''}=\pi/3,$$

但不论三条直线次序如何排列，不可能有 $\overline{DD'}+\overline{D'D''}=\overline{DD''}$！



8.7.7.7 4.3.6.1 中对 4.3.6 的证明，使我们预期 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 与 $\mathfrak{A}(E)$ 之间有一个自然的双射；事实上，我们引进映射

$$\tilde{\mathfrak{A}}(E)\ni x\longmapsto 2x\in\tilde{\mathfrak{A}}(E),$$

其核为 $\{0,\varpi\}$。根据 8.7.3.3，在商集上诱导出的映射 $\mathfrak{A}(E)\to\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 是一个双射；我们仍将它记作 $\mathfrak{A}(E)\ni x\longmapsto 2x\in\tilde{\mathfrak{A}}(E)$，逆映射则记为 $1/2$：$\tilde{\mathfrak{A}}(E)\ni x\longmapsto 1/2x\in\mathfrak{A}(E)$。几何上，这个映射如图 8.7.7.6 所示；在三角学中，这个映射解释了正弦、余弦、正切何以可以表示成半弧的正切的代数式。另一很有用的应用是：

8.7.7.8 命题. 设 D,D' 是 E 中两条直线，则有

$$\sigma_{D'}\circ\sigma_D=\varPhi(2\widehat{DD'}),$$

即 $\sigma_{D'}\circ\sigma_D$ 是以 $2\widehat{DD'}$ 为转角的旋转。

我们知道 (8.2.3.2) $f=\sigma_{D'}\circ\sigma_D\in O^+(E)$；由 8.7.7.4 又有 $f(D)=\sigma_{D'}(D)=D''$ 和 $\widehat{DD''}=2\widehat{DD'}$，由此即可证得命题，因为 $O^+(E)$ 是单可迁的。

8.7.7.9 以 $O^+(E)$ 和 $PO^+(E)$ 相比，我们注意到 $\sqrt{\cdot}$ 和 $\cdot^2$ 是相应的映射。

8.7.8 三角学. 根据复指数函数满足 $e^{x+x'}=e^xe^{x'}$ 的事实，特别可推出如下公式

8.7.8.1

$$\begin{cases}\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b,\\ \sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a,\end{cases}$$

两式对任何实数 a,b 都成立。而由 8.3.6 可知当 E 定向时这两个公式在 $O^+(E)$ 上也成立，不过有一点区别，那就是 $a+b$ 要换成乘积 fg，这里 $f,g\in O^+(E)$.

8.7.8.2 由 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 和 $\mathfrak{A}(E)$ 的群结构的定义，最终可以推出，如果 E 是定向的，而我们通过到子群的转移来定义 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 和 $\mathfrak{A}(E)$ 上的余弦和正弦函数，则公式 8.7.8.1 在 $\tilde{\mathfrak{A}}(E)$ 和 $\mathfrak{A}(E)$ 中也仍成立。作为定义，一个定向角的余弦和正弦等于它的任何一个测度的余弦和正弦.

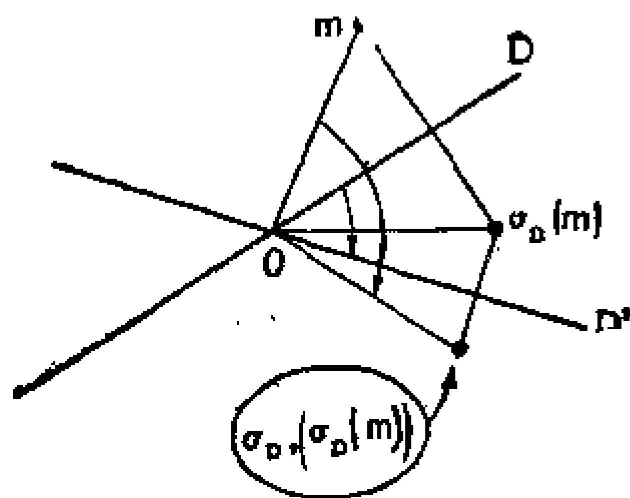


图 8.7.7.7.

8.7.8.3 由 8.7.8.1 出发，通过代数变形可以导出大量公式，有时很有用，并且很有趣；在 8.12.8 有一张详尽的公式表。它们在本书中的应用，可参看 10.3.10，18.6.13.

8.7.8.4 反过来，定向角也能用来从几何的角度研究复数．将 $\mathbf{C}$ 看作一个定向欧氏平面，即带有欧氏结构及典范定向的 $\mathbf{R}^2$. 若 $z\in\mathbf{C}\backslash 0$，则可将它写成 $z=|z|(z/|z|)$，这样一来 $z/|z|\in\mathbf{U}$. 定向角 $(\Theta\circ\Phi)^{-1}(z/|z|)\in\tilde{\mathfrak{A}}(\mathbf{C}=\mathbf{R}^2)$ 称为复数 z 的**辐角**，记作 $\arg(z)$；若 $z=0$，则取 $\arg(z)=\tilde{\mathfrak{A}}(\mathbf{C})$ 的任何元素。复数 $z\in\mathbf{C}$ 完全由 $|z|$ 和 $\arg(z)$ 所决定，$(|z|,\arg(z))$ 称为 z 的**三角形式**；当然有

8.7.8.5 $|zz'|=|z||z'|$，$\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$.

在计算中，使用测度常常会更方便，即若 t 是 $\arg(z)$ 的一个测度，则记 $z=|z|e^{it}$；每个这样的写法都称为 z 的"一个"三角形式。它有时可以改写为

$$z=|z|(\cos t+i\sin t).$$

在 9.6.5.1 将给出它的古典应用；也可参看 12.4.2.

8.8 相似；迷向锥面与迷向直线

8.8.1 现在，我们的欧式空间又可以是任意维的了．我们之所以对相似的概念感到兴趣，除了在以后（9.6.7, 9.6.8, 9.6.9）将看到的那些有趣的应用外，还因为它跟物理世界的概念有自然的联系，物理世界中不存在长度单位，因为并不容有一个自然的欧氏结构．相似，是一种与长度无关而仅与长度之比有关的变换．

8.8.2 定义． 使 $\|f(x)\|=\mu\|x\|\ \forall x\in E$ 的 $f\in GL(E)$ 称为 E 中以 μ 为相似比的一个**相似**．相似的全体记为 $GO(E)$；令

$$GO^+(E)=GO(E)\cap GL^+(E)$$

（相应地，$GO^-(E)=GO(E)\cap GL^-(E)$）并称其中元素为**正向相似**（相应地，**逆向相似**）．

8.8.3 位似 $\lambda \mathrm{Id}_E$ 是相似，相似比为 $\mu=|\lambda|$，$\lambda<0$ 时它为正向相似的充要条件是 $\dim E$ 为偶数．若 $f\in GO(E)$，则有

$$(f(x)|f(y))=\mu^2(x|y)\ \ \forall x,y\in E;$$

对 $\mu^{-1}f\in GL(E)$ 应用 8.1.5 即可看出这一点．为使这一观念更明确化，我们把每个以 μ 为相似比的 $f\in GO(E)$ 写成

$$f=(\mu^{-1}f)\circ(\mu\ \mathrm{Id}_E)$$

的形式．这样就可看出 $GO(E)$ 同构于群的直积

$$GO(E)\cong O(E)\times(\mathbf{R}_+^*\mathrm{Id}_E);$$

同样 $GO^+(E)\cong O^+(E)\times(\mathbf{R}_+^*\mathrm{Id}_E)$．若 $n=1$，当然就有

$$GO(E)=GL(E).$$

$n=1$ 的情形是以后经常被排除在外的．

8.8.4 平面相似与复数． 设 E 是定向欧氏平面，并根据 8.3.12

将它恒同于一条复向量直线. E 中复线性群 $GL_{\mathbf{C}}(E)$ 的元素都满足 8.8.2 的定义,因此 $GL_{\mathbf{C}}(E)\subset GO(E)$. 事实上, $GO^+(E)=GL_{\mathbf{C}}(E)$, 这在 8.8.3 和 8.3.12 中已有说明. 至于 $GO^-(E)$, 固定 $s\in O^-(E)$ 就有 $GO^-(E)=sGO^+(E)$; 既然 s 是关于一条直线的对称,若在 E 中取一个属于该直线的基(E 的一个复基,仅是一个向量!)就可得出:

8.8.4.1 命题. 对 E 的任一复基而言, 正向(或逆向)相似就是映射 $z\longmapsto az$(或 $z\longmapsto a\bar{z}$)全体,这里 a 取遍 $\mathbf{C}^*$.

8.8.5 相似与角

8.8.5.1 命题. 相似是保角的. 确切地说

(i) $\forall f\in GO(E)\ \forall\Delta,\ \Delta'\in\tilde{\mathscr{D}}(E)\ \forall D,D'\in\mathscr{D}(E)$:

$\overline{f(\Delta)f(\Delta')}=\overline{\Delta\Delta'}$ 且 $\overline{f(D)f(D')}=\overline{DD'}$;

(ii) $\forall f\in GO(E)$, 若 D,D' 正交,则 $f(D),f(D')$ 正交;

(iii) 若 $\dim E=2$,

$\forall f\in GO^+(E)$(或 $GO^-(E)$)$\forall\Delta,\Delta'\in\tilde{\mathscr{D}}(E)\ \forall D,\ D'\in\mathscr{D}(E)$:

$\widehat{f(\Delta)f(\Delta')}=\widehat{\Delta\Delta'}$ 且 $\widehat{f(D)f(D')}=\widehat{DD'}$(或分别为

$-\widehat{\Delta\Delta'}$ 和 $-\widehat{DD'}$).

反过来, 若 $\dim E\geqslant 2$ 而 $f\in GL(E)$ 使得 D,D' 正交时总有 $f(D),f(D')$ 正交的结论,则 f 是相似.

鉴于 8.6.6, 8.7.2.4 和 8.7.7.3, 只有(iii)尚须证明. 我们的线性映射满足 $(f(x)|f(x'))=0\ \forall$ 使 $(x|x')=0$ 的 x,x'. 先取定 $x\in E\backslash 0$, 考察线性形式 $\varphi:y\longmapsto(f(x)|f(y))$; 根据假设条件它在超平面 $x^\perp$ 上为零, 因而(参见 2.4.8.6)存在 $k\in\mathbf{R}^*$ 使

$$(f(x)|f(y))=k(x|y)\quad\forall y\in E.$$

现在假定 x 可变化,并对每一 x 指定一个 $k(x)$ 使

$$(f(x)|f(y))=k(x)(x|y)\quad\forall x\in E\backslash 0,\ \forall y\in E.$$

取线性无关的 x,x', 考察 $k(x+x')$; 则有

$$\begin{aligned}(k(x+x')|f(y))&=k(x+x')(x+x'|y)\\&=(f(x)|y)+(f(x')|y)\end{aligned}$$

$$= k(x)(x|y) + k(x')(x'|y) \quad \forall y \in E;$$

因此

$$[k(x+x') - k(x)]x + [k(x+x') - k(x')]x' = 0.$$

因此，由于 x', x' 的线性无关就有

$$k(x) = k(x') = k(x+x');$$

最后，k 是一个常数，从而 f 是相似.

8.8.6 相似与复化

我们将 E 复化为 E^C，将一个元素 $f \in GL(E)$ 复化为 $f^C \in GL(E^C)$，从而将 E 的二次型 $N = \|\cdot\|^2 : x \longmapsto \|x\|^2$ 复化为 E^C 上的二次型 N^C. 参见 7.1.1，7.2.1，7.3.4.

8.8.6.1 定义. $\dim E \geq 3$ 时 E^C 的子集 $(N^C)^{-1}(0)$ 称为 E 的迷向锥面. 若 $\dim E = 2$，$(N^C)^{-1}(0)$ 仅含两条 E^C 中相异直线，称它们为 E 的迷向直线，并记为 $\{I, J\}$. 对 E^C 的共轭映射 σ（参见 7.1.1），有 $\sigma((N^C)^{-1}(0)) = (N^C)^{-1}(0)$，且当 $\dim E = 2$ 时：$\sigma(I) = J$，$\sigma(J) = I$.

我们用锥面这一名称，理由是 N 是齐性的：$N^C(\lambda x) = \lambda^2 N^C(x)$. E 的二次型 $\|\cdot\|^2$ 是非退化的，因而 N^C 也不退化（参见 7.3.5，13.2.1，13.2.3.1），从而 $(N^C)^{-1}(0)$ 由两条相异直线组成. 为了避免参照 13.2，也为了下文马上就要用到这一事实，我们现在直接证明它由两条相异直线组成：设 $\{e_1, e_2\}$ 是 E 的标准正交基，因而

$$N^C(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$$

（参见 7.3.5），而且 $z_1^2 + z_2^2 = 0$ 等价于 $z_2 = \pm i z_1$. 这样，由 7.2.1 就有

$$\sigma((N^C)^{-1}(0)) = (N^C)^{-1}(\sigma(0)) = (N^C)^{-1}(0);$$

若我们比如取

$$I = \{(z, -iz)\}, \quad J = \{(z, iz)\},$$

则有 $\sigma(I) = J$，$\sigma(J) = I$.

欧氏平面上的两条迷向直线并无先天的差异；更确切地说：

8.8.6.2 命题. 在欧氏平面上选定一条迷向直线，等价于给出 E 的一个定向；它们的关系是：选定的迷向直线 I 就是在 E 中

一个符合定向的标准正交正基下斜率为 $-i$ 的直线。

应该证明 $\mathrm{GO}^+(E)$ 的成员使 I 不动；这一点可由 $\mathrm{GO}^+(E)$ 连通，因而 I 不能跳到 J 去而得证，这个想法也是很有启发性的。若在任何一个标准正交正基下进行计算，如

$$M(f)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

对 $\varepsilon=\pm 1$ 就有

$$\begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+\varepsilon ib \\ b-\varepsilon ia \end{pmatrix}=(a+\varepsilon ib)\begin{pmatrix} 1 \\ -\varepsilon i \end{pmatrix}.$$

8.8.6.3 附注. 上述计算也表明了，I（或 J）关于 $f\in O^+(E)$ 的特征值是 $a+bi=\Theta(f)$（或 $a-bi=\overline{\Theta(f)}$），其中 Θ 是 8.3.6 中的映射．而且，若 $f\in O^-(E)$，由 8.3.1 (ii) 就有 $f^C(I)=J$.

8.8.6.4 命题. 设 $f\in \mathrm{GL}(E)$，则

(i) $f\in \mathrm{GO}(E)\Longleftrightarrow f^C((N^C)^{-1}(0))=(N^C)^{-1}(0)$，即 f^C 使 E 的迷向锥面整体不变；

(ii) 若 $\dim E=2$：

$f\in \mathrm{GO}^+(E)\Longleftrightarrow f^C(I)=I$，$f\in \mathrm{GO}^-(E)\Longleftrightarrow f^C(I)=J$.

$\Rightarrow$ 的证明是显然的．对 (i) 的 $\Leftarrow$，我们已知道 f^C 使 N^C 的核不变，而且 N^C 在 f^C 下的原象，即二次型 $(f^C)^*(N^C)$（参见 13.1.3.9）跟 N^C 有相同的核．然而由 14.1.6.2，可推得存在 $k\in \mathbf{C}^*$ 使

$$(f^C)^*(N^C)=kN^C,$$

特别当限制在 $E\subset E^C$ 上时，有

$$\|f(x)\|^2=k\|x\|^2\quad \forall x\in E.$$

这表明 k 是实数而 f 是以 $\sqrt{k}$ 为相似比的相似．为证 (ii) 的 $\Leftarrow$，首先注意到，由 8.8.6.1 有 $f(\{I,J\})=\{I,J\}$；于是可应用 (i) 的 $\Leftarrow$，再注意到若

$$f\in \mathrm{GO}^+(E)\ (\text{或}\ f\in \mathrm{GO}^-(E)),$$

则由 8.8.6.2 和 8.8.6.3 有 $f(I)=I$（或 $f(I)=J$）.

8.8.7 Laguerre 公式. Laguerre 在中学毕业班的几何课上对

老师的讲解不感兴趣，却进行了一番独立思考，以下就是他这种独立思考的成果。

8.8.7.1 首先假设 E 是定向欧氏平面，(I, J) 是 8.8.6.2 所给出的 E^C 中的一对迷向直线；设 D，D' 是 E 中两条直线，D^C，D'^C 是它们在 E^C 中的复化(参见 7.4)。

在复射影直线 $P(E^C) \simeq \mathscr{D}(E^C)$ 上，很自然地会考虑到 D^C，D'^C，I，J 这四点的交比。然而，若设 $f \in O^+(E)$ 使 $f(D) = D'$，则由 6.6.3 和 8.8.6.3 有

$$[D^C, D'^C, I, J] = \Theta(f)/\overline{\Theta(f)},$$

但因 $\Theta(f) \in \mathbf{U}$，$\overline{\Theta(f)} = (\Theta(f))^{-1}$，为将 $[D^C, D'^C, I, J]$ 完全用定向角来表示，只须应用 8.7.5.1 和 8.7.7.7 即可得出：

8.8.7.2 **定理** (Laguerre 公式)。我们有

$$[D^C, D'^C, I, J] = [\underline{\Theta}(\underline{\psi}(\widehat{DD'}))]^2;$$

若 t 是 $\widehat{DD'}$ 的任一测度，则有 $[D^C, D'^C, I, J] = e^{2it}$。

为放心起见，我们来验证当改变 E 的定向时，上述公式确能保证；事实上由 8.8.6.4，I 变成 J，J 变成 I，而由 8.3.6，$\Theta(\cdot)$ 变成 $(\Theta(\cdot))^{-1}$；因此由 6.3.1 可保证与定向的相符性。若改变 D 和 D'，则可用 8.7.7.3 和 6.3.1。公式的应用见 17.4.2.2。

8.8.7.3 现设 E 并无定向，只须 $\{I, J\}$ 定义好即可；于是，对 E 中一对直线 D, D' 来说，交比 $[D^C, D'^C, I, J]$ 在 $\mathbf{C}$ 中的定义允许相差 $z \longmapsto z^{-1}$。定义一个从 $\mathbf{U} \setminus \{-1\}$ 到 $]-\pi, \pi[$ 中的记作 log 的映射，使它恰是限制映射 $A:]-\pi, \pi[\to \mathbf{U} \setminus \{-1\}$ 的双射逆映射。设 t 是在 E 的任一定向下 $\widehat{DD'}$ 的一个测度；由 8.7.7.6，$\overline{DD'}$ 应为 t 或 $\pi - t$，由此可知在每种情形都有下述公式

8.8.7.4

$$\boxed{\overline{DD'} = \frac{1}{2}\left|\log([D^C, D'^C, I, J])\right|.}$$

绝对值恰好抵消了从 $\log(e^{2it})$ 转换到

$$\log\left(e^{2i(\pi-t)}\right)=\log\left(e^{-2it}\right)=-\log e^{2it}$$

所引起的差别。

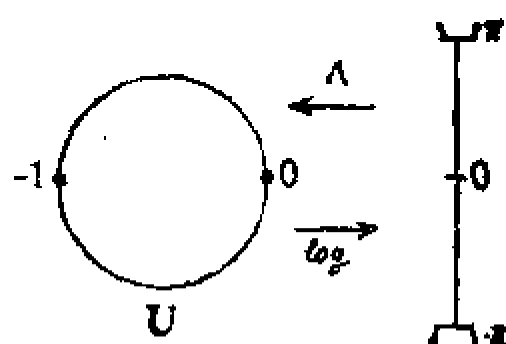


图 8.8.7.3.

8.8.7.5 归功于 Cayley 的公式8.8.7.4，很好地说明了他的原则(参见 5.2.2)；由此，E 中直线的交角的几何学就得以产生了，这实际上就是射影直线 $P(E)$ 的度量的几何学，不过已看作一个适当的射影空间的子几何 (见 19.2)。

8.9 四元数. 到 $O^+(3)$ 和 $O^+(4)$ 的映射

复数在 $O^+(2)$ 的研究中起着很重要的作用；同样，四元数体 $\mathbf{H}$ 将会有助于我们对 $O^+(3)$，尤其是对 $O^+(4)$ 作深入的研究。

8.9.1 四元数复习. 我们考虑的是如下构造的一个记作 $\mathbf{H}$ 的非**交换体**：从 $\mathbf{R}^4$ 出发并记其中的典范基为 $\{1, i, j, k\}$，乘法 $\mathbf{R}^4\times\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4$ 由下列公式作线性扩张而得出：

$$1u=u\ \forall u=1,i,j,k,\ i^2=ii=j^2=jj=k^2=kk=-1,$$
$$ij=-ji=k,\ jk=-kj=i,\ ki=-ik=j.$$

可以验证得出的是 $\mathbf{R}^4$ 上的一个满足结合律的乘积，将带有这一乘法的 $\mathbf{R}^4$ 记为 $\mathbf{H}$ 并称为四元数体. $\mathbf{H}$ 中含有 $\mathbf{R}\cdot 1$，我们把它等同于 $\mathbf{R}$. 至于 $\mathbf{R}^3$，我们将其嵌入 $\mathbf{H}$ 如下：

$$\mathbf{R}^3=\mathbf{R}i+\mathbf{R}j+\mathbf{R}k\subset\mathbf{H};$$

这个 $\mathbf{R}^3$ 称为纯四元数集合。 每个四元数 $q\in\mathbf{H}$ 都可写成 $q=$

$\mathscr{R}(q)+\mathscr{P}(q)$，其中 $\mathscr{R}(q)\in\mathbf{R}$，$\mathscr{P}(q)\in\mathbf{R}^3$. 作为定义，$q$ 的共轭四元数是 $\bar{q}=\mathscr{R}(q)-\mathscr{P}(q)$. 我们有

$$\bar{\bar{q}}=q,\quad q=\bar{q}\Longleftrightarrow q\in\mathbf{R},\quad \bar{q}=-q\Longleftrightarrow q\in\mathbf{R}^3,$$

$$\overline{q+r}=\bar{q}+\bar{r},\quad \overline{qr}=\bar{r}\bar{q}\ \text{（当心出错!）},$$

$$q\in\mathbf{R}^3\Longleftrightarrow q^2\in\mathbf{R}_-,\quad q\in\mathbf{R}\Longleftrightarrow q^2\in\mathbf{R}_+.$$

$\mathbf{R}^4$ 的典范数量积反过来可表示为

$$(q|r)=\frac{1}{2}(\bar{q}r+\bar{r}q);$$

特别总有 $q\bar{q}=\mathbf{R}_+$，而 $\|q\|=\sqrt{q\bar{q}}$ 仍称为 q 的范数(或模). 我们有 $\|qr\|=\|q\|\|r\|$；这样就可看出 $\mathbf{H}$ 确是一个体，只要取 $q^{-1}=\|q\|^{-2}\bar{q}$. 若记

$$S^3=\{q:\|q\|=1\},$$

即 $\mathbf{R}^4=\mathbf{H}$ 的单位球面，则我们看到 S^3 上有一个乘法群的结构(正如 $S^1=\mathbf{U}=\{z:|z|=1\}$ 本身也是一个交换群!). 至此，我们可能会想，这一事实在高维的情形是否也成立呢? 也就是说，别的球面是否也具有群的结构呢? （这种结构是很好的——在一种尚待进一步阐明的意义上说)；但借助于代数拓扑可以证明，能容有良好的群结构的球面仅有 S^1 和 S^3：例如可参看 [PO]，第 284 页，或 [HU]，第 15 章.

球面 S^7 有一个很有趣的结构，那几乎是一个群，借助于 Cayley 八元数可以说明这一点：参见 [PO]，第 278 页.

至于 S^2 球面，现在将作为 $S^2=\{q\in\mathbf{R}^3:\|q\|=1\}$ 嵌入在纯四元数集合中.

也不能期望对 $n=2$ 或 4 以外的某一 n 找到 $\mathbf{R}^n$ 上的合理的体结构，能找到这样的结构的仅有 $\mathbf{R}^2$ 上的 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{R}^4$ 上的 $\mathbf{H}$；参见 [PO]，第 284 页. 仅 $\mathbf{R}^8$ 有一个相当好的结构，即 Cayley 八元数的结构. 但对 $\mathbf{R}^n$，请参看 8.10.3 及其中的参考文献. 注意到若 q,q' 是纯四元数，则 qq' 的纯部 $\mathscr{P}(qq')$ 就是 $\mathbf{R}^3$ 中的向量积 $q\wedge q'$ (见 8.11.13).

与 $\mathbf{C}$ 的情形相反，体 $\mathbf{H}$ 的自同构是简单而熟知的；见 8.12.10，

并可参看 2.6.4.

8.9.2 定理

(i) 设 $s\in\mathbf{R}^3\backslash 0$; 则 $q\to -sqs^{-1}$ 使 $\mathbf{R}^3$ 稳定，而且它在 $\mathbf{R}^3$ 上的限制就是 $\mathbf{R}^3$ 中关于平面 $s^\perp$ 的对称 $\sigma_{s^\perp}$.

(ii) 设 $s\in\mathbf{H}^*$ 且 $\rho'_s: q\longmapsto sqs^{-1}$; 则 ρ'_s 使 $\mathbf{R}^3$ 稳定，而且它的限制 $\rho_s=\rho'_s|_{\mathbf{R}^3}\in O^+(3)$. 此外 $\rho_s=\rho_{s'}\Longleftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}^*: s'=\lambda s$.

(iii) 反过来，对每一 $f\in O^+(3)$, 存在 $s\in\mathbf{H}^*$ 使 $f=\rho_s$.

为证 $\mathbf{R}^3$ 稳定，可利用下列准则:

$$q\in\mathbf{R}^3\Longleftrightarrow q^2\in\mathbf{R}_-: (-sqs^{-1})^2=sq^2s^{-1}\in\mathbf{R}_-;$$

映射 $q\longmapsto -sqs^{-1}$ 确是线性等距:

$$\|-sqs^{-1}\|=\|q\|\ \forall q.$$

最后 $s\longmapsto -sss^{-1}=-s$ 且若 $q\in\mathbf{R}^3$ 使 $(q|s)=0$, 则有

$$0=(q|s)=\frac{1}{2}(\bar{q}s+\bar{s}q)=\frac{1}{2}(-qs-sq),$$

因此

$$sq=-qs\ \text{而且}\ q\longmapsto -sqs^{-1}=ss^{-1}q=q.$$

为研究 ρ'_s 和 ρ_s, 可如上进行讨论，从而可知 $\rho_s\in O(3)$; 只须再证 $\rho_s\in O^+(3)$. 由拓扑学可知，因 $\mathbf{H}^*$ 连通而且映射 $\mathbf{H}^*\ni s\longmapsto\{q\longmapsto sqs^{-1}\}\in O(3)$ 连续，ρ_s 必与 $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$ (由 $s=1$ 得出) 位于 $O(3)$ 的同一连通分支内，这一点也可从代数上证明. "此外"云云则可从以下事实推出: $\mathbf{H}$ 中与 $\mathbf{R}^3$ 的所有元素可交换的 s 显然是 $\mathbf{R}$ 的元素. (iii) 可由 (i) 及 8.2.12 推出.

8.9.3 推论. 映射 $\rho: S^3\ni s\longmapsto\rho_s\in O^+(3)$ 是连续、满射的群同态，且以 $\{\pm 1\}$ 为核; 特别是，$O^+(3)$ 同胚于 $P^3(\mathbf{R})$.

我们记得 $S^3=\{q\in\mathbf{H}: \|q\|=1\}$; 根据 8.9.2 (ii), 所求的核应使 $s\in\mathbf{R}$ 且 $\|s\|=1$, 因而必为 ± 1. 最后群 S^3 关于子群 $\{\pm 1\}$ 所作的商群引出了等价关系 $x\sim y\Longleftrightarrow y=\pm x$, 因此这个商群就是 $P^3(\mathbf{R})$. 见 4.3.3.2.

8.9.4 命题. 设 $s=\alpha+t$, $t\in\mathbf{R}^3\backslash 0$, $\alpha\in\mathbf{R}$; 则旋转 $\rho_s\in O^+(3)$ 的轴是直线 $\mathbf{R}t$, ρ_s 的转角 $\theta\in[0,\pi]$ 当 $\alpha\neq 0$ 时由 $\operatorname{tg}\theta/2=$

$\|t\|/|\alpha|$ 给出，而当 $\alpha=0$ 时 $\theta=\pi$ 且 ρ_s 是关于 $\mathbf{R}t$ 的中心对称

$\mathbf{R}t$ 的不变性是显然的．转角 θ 的计算则稍为复杂一些；首先注意到 $\rho_{zsz^{-1}}=\rho_z\rho_s(\rho_z)^{-1}$ 和 ρ_s 有相同的转角，而因 $O^+(3)$ 在 S^2 上可迁，故存在 z 使 $zsz^{-1}=\beta i$，$\beta\in\mathbf{R}$，因而可对 $s=\alpha+\beta i$ 进行计算．

ρ_s 的转角应在 $i^\perp\cap\mathbf{R}^3$ 中去求，也就是说应有 $\theta=\widehat{j,(\rho_s j)}$．但又有 $\rho_s j=(\alpha+\beta i)j(\alpha+\beta i)^{-1}=(\alpha^2+\beta^2)^{-1}(\alpha+\beta i)j(\alpha-\beta i)=(\alpha^2+\beta^2)^{-1}[(\alpha^2-\beta^2)j+2\alpha\beta k]$，从而

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{2(\beta/\alpha)}{1-(\beta/\alpha)^2}，因此$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\|t\|}{|\alpha|}.$$

若 $\alpha=0$，则有 $\rho_s(j)=-j$．

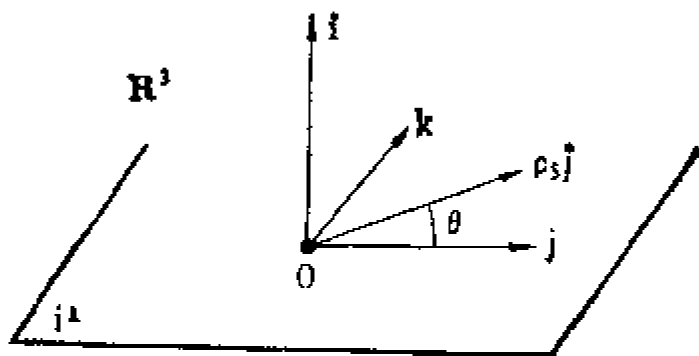


图 8.9.4.

8.9.5 8.9.3 和 8.9.4 的意义在于给出了 $O^+(3)$，即我们的物理空间中的旋转的一种参数表示；这种参数化的做法在力学和物理学中都是很基本的，但却并非易事，既不易找到，也不易运用．例如可参阅 [BE] 第 136 页的 Euler 角，并请写出旋转是怎样合成的！8.9.3 和 8.9.4 给出了一种简捷的分解算法，不过仍有不足之处：±1 选择难定．如能避免这一点当然最好，然而这一点却正是我们的研究对象的一种本质属性，因为有：

8.9.6 命题． 不存在 ρ 的提升 $f:O^+(3)\to S^3$，也就是使 $\rho\circ f=$

$\mathrm{Id}_{O^+(3)}$ 的 f，能够或是连续的，或是一个群同态。

$$\begin{array}{c} S^3 \\ f \uparrow \downarrow \rho \\ O^+(3) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma' & \xrightarrow{\rho} & \Gamma \\ \cong & & \cong \\ \mathbf{U} & \longrightarrow & \mathbf{U} \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

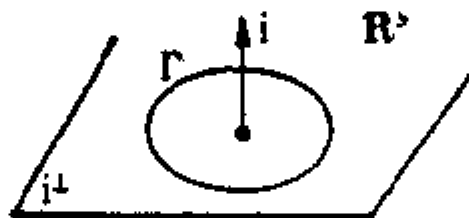


图 8.9.6.

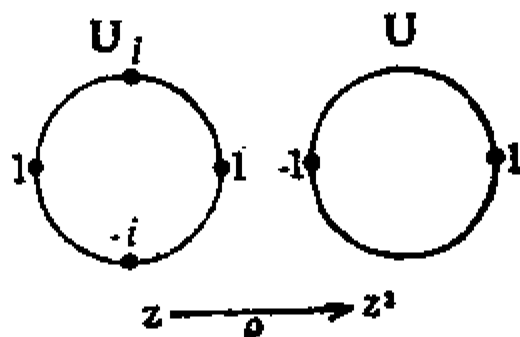


图 8.9.7.

设 Γ 是圆周，即 $O^+(3)$ 中以 $\mathbf{R}i$ 为轴的旋转的集合；由 8.9.4：$\rho^{-1}(\Gamma)=\Gamma'=S(\mathbf{R}+\mathbf{R}i)$，即平面 $\mathbf{R}+\mathbf{R}i\subset\mathbf{H}$ 的单位圆周．而且，8.9.4 的证明告诉我们，限制映射 $\rho|\Gamma':\Gamma'\to\Gamma$ 在恒同 $\mathbf{R}+\mathbf{R}i=\mathbf{C}$ 的观点下无非就是映射 $z\longmapsto z^2$．于是，假设存在 f：$O^+(3)\to S^3$ 使 $\rho\circ f=\mathrm{Id}_{O^+(3)}$，并考察它的限制 $f|\Gamma$；若 f 是同态，则应有 $f(\mathrm{Id})=1$ 从而 $f(-1)=\pm i$，这是因为如前所述 $\rho(f(-1))=(f(-1))^2=-1$，如果，比如说

$f(-1)=i$，$(f(-1))^2=f((-1)^2)=f(1)=1=i^2=-1$，则得矛盾．现假设 f 连续，而且比如说 $f(\mathrm{Id})=1$（-1 的情形是类似的）；由反函数的概念可知 $\rho(f(z))=z$ 蕴含着 $f(z)=\sqrt{z}$，按惯例确定在 $\mathbf{C}/\mathbf{R}_-$ 上；但这样一来，当 z 在 $\mathbf{C}$ 的上半平面（或下半平面）趋于 -1 时，$f(z)=\sqrt{z}$ 趋于 i（或 $-i$），得出矛盾．从而命题得证。

8.9.7 如同 8.9.2 的证明一样，我们看到，映射 $\mathbf{H}\ni q\longmapsto sqr\in\mathbf{H}$ 是 $\mathbf{H}$ 的等距，即是属于 $O(4)$ 的，这对所有使 $\|s\|\|r\|=1$ 的 $s,r\in\mathbf{H}^*$ 都成立，特别当 $\|s\|=\|r\|=1$ 时也成立。而且，跟 8.9.2 (ii) 的证明相仿地，可证 $q\longmapsto sqr$ 属于 $O^+(4)$，实际上，有

8.9.8 定理． 映射

$$\tau: S^3\times S^3\ni(s,r)\longmapsto\{q\longmapsto sq\bar{r}\}\in O^+(4)$$

是连续满射的群同态，其核由两个元素 $\{(1,1),(-1,1)\}$ 组成。

8.9.9 这里当然要涉及 $S^3\times S^3$ 上的直积群的结构。而

$$\tau(ss',rr')(q)=ss'q\overline{rr'}=s(s'q\bar{r}')\bar{r}=(\tau(s,r)\circ\tau(s',r'))(q).$$

τ 的核由使 $sq\bar{r}=q\ \forall q$ 的 (s,r) 所组成；首先 $\bar{r}=s^{-1}$，从而对所有的 q 有 $sqs^{-1}=q$，由此可得 $s\in\mathbf{R}$，从而 $s=\pm1$。为证 τ 是满射，设 $f\in O^+(4)$ 且 $q_0=f(1)$；则有 $\tau(q^{-1},1)\in O^+(4)$ 及 $\tau(q_0^{-1},1)(q_0)=1$，从而 $\tau(q_0^{-1},1)\circ f\in O^+(3)$。但由 8.9.2 (iii) 有：$\tau(q_0^{-1},1)\circ f=\rho_s'$ 对 $s\in\mathbf{H}^*$ 成立，所以 $f=\tau(q_0,1)\circ\rho_s'=\tau(q_0s,s^{-1})$。

8.9.10 推论． 群 $O^+(4)$ 容有除本身及中心 $\{\pm\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^4}\}$ 外的其它正规子群，比如说 $\tau(S^3\times\{1\})$，$\tau(\{1\}\times S^3)$。特别地，

$$O^+(4)/\{\pm\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^4}\}$$

是非单的。

8.9.11 注． 至此，从 8.5 起进行的 $O(n)$ 的单性的讨论已可告一段落。

我们看到，$O^+(4)$ 几乎是一个直积。真正是一个直积的是正交射影群 $PO^+(4)$：

8.9.12 $PO^+(4)=p(\tau(S^3\times\{1\}))\times p(\tau(\{1\}\times S^3))$.

从几何观点来看，8.9.12 有许多有趣的推论，参见 18.8.8. 关于四元数在几何中的其它应用，可参阅一本很有趣的书 [VL]。

8.9.13 问题． 在复数域 $\mathbf{C}$ 上可深入研究 $O^+(2)$，在四元数体上可深入研究 $O^+(3)$，$O^+(4)$，这样，特别就可顺利地给出 $O^+(2)$，$O^+(3)$ 和 $O^+(4)$ 的参数表示。怎样给出 $O^+(n)$ 的参数表示？Clifford 代数提供了答案；参见 8.10.3。

8.10 $O^+(n)$ 与代数拓扑

8.10.1 我们用本节来为 8.2.14 提出的讨论纲要作一终结；以下内容若要透彻了解，似应具备初步的（多些更好）代数拓扑知识，我们不加说明地指出，$O^+(n)$ 是 C^∞ 微分流形，而且是 Lie 群；8.10.4 中特别用到了 Lie 群的技巧。

8.10.2 作为特例，我们已经看到 $O^+(2)$ 就是圆周 S^1，$O^+(3)$ 就是实射影空间 $P^3(\mathbf{R})$。我们指出，根据 8.9.8，$O^+(4)$ 可看作 $(S^3\times S^3)/\mathbf{Z}_2$，由 [PO] 的推论 13.60 则可知 $O^+(5)$ 与 $\mathbf{H}^2$ 有关；由[PO] 的命题 13.61，则可知 $O^+(6)$ 与$\mathbf{C}^4$有关。也可参阅[DE1]，第 106—116 页。最后，$O^+(8)$ 产生了一种"平凡化"现象，原因是外自同构群 Aut $(O^+(8))$ 关于内自同构群 $\mathrm{Int}(O^+(8))$ 所作的商群

$$\mathrm{Aut}(O^+(8))/\mathrm{Int}(O^+(8))$$

同构于对称群 $\mathfrak{S}_3$；参见 [CE2]，第 119 页。

8.10.3 基本群. 既然 $O^+(2)$ 从拓扑上说就是圆周 S^1，它的基本群 $\pi_1(O^+(2))$ 必同构于 $\mathbf{Z}$. 相反地：对所有的 $n\geqslant 3$，

$$\pi_1(O^+(n))=\mathbf{Z}_2.$$

对 $n=3$，这可从 8.9.3 推出，因为 ρ 是两叶的覆盖而 S^3 单连通；对 $n>3$，这可由 $n=3$ 的情形以及如下所作的同伦正合序列推出：将球面 S^n 表示成齐性空间 $S^n=O^+(n+1)/O^+(n)$（参见 1.5.9 或 8.2.8），再作出相应的纤维化的同伦正合序列. 从几何上看，找到 $\pi_1(O^+(3))$ 从而也就是 $\pi_1(O^+(n))$ 的一个非零元素是很有意思的. 但 8.9.6 的证明已经提供了答案，表明 $\mathbf{R}^3$ 中绕定轴的旋转全体，即圆周 Γ 是 $O^+(3)$ 中一个不同伦于 0 的圈（因为 S^3 连通）. 特别地，由于 $\pi_1(O^+(3))=\mathbf{Z}_2$，所以 Γ 兜了两圈之后是同伦于 0 的. 对此可以用两种方式来作解释，一种是做一条纸带，另一种是拿一只汤盘来作实验："实验者手中水平地持一汤盘，将其绕过盘心的垂线旋转 2π 角度. 这时他的手臂必然要转动，

这是一种扭转，令人吃惊的是，若以同一方式、沿同一方向作第二次旋转，则手臂又会回到初始的位置（而并非扭转两次！）”（[PO]第 2 页）；参见图 8.10.3 和 8.10.4。

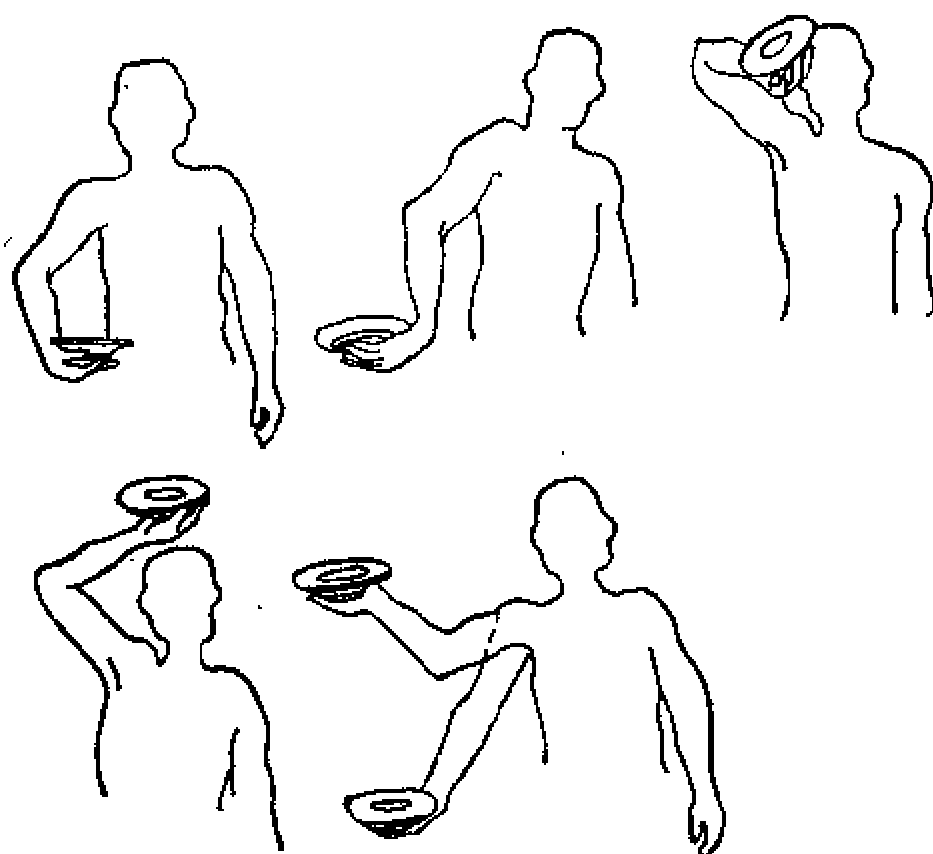


图 8.10.3.

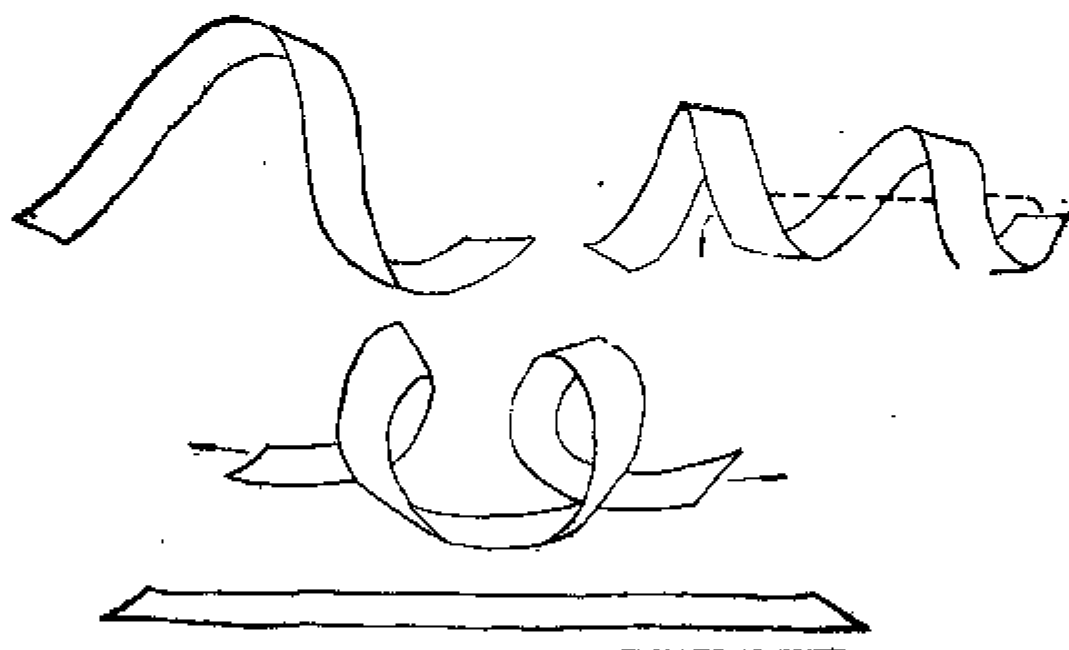


图 8.10.4.

可是关于 $\pi_1(O^+(n))$ 还有一个更为基本的结果，事实上群 $G=O^+(n)$ 定义了一个单连通的拓扑空间，即其泛覆盖空间 $\tilde{G}$。于是我们知道，G 的群结构通过提升提供了 $\tilde{G}$ 上的一个群结构；这样，对每个 n 都有一从几何群 $O^+(n)\subset GL(\mathbf{R}^n)$ 导出的抽象群 $\widetilde{O^+(n)}$。由此就产生了一个问题：这个抽象群能实现为几何群吗？在 $n=3$ 时，我们已用四元数体 $\mathbf{H}$ 来实现 $\widetilde{O^+(3)}$，以其作为 $\mathbf{H}=\mathbf{R}^4$ 中的乘法；那么，在 $n>3$ 时是什么东西在起四元数体的作用呢？是 Clifford 代数，而 $\widetilde{O^+(n)}$ 则称为旋量群；以上所有内容均可参阅 [PO] 第 13 章和 [BI 2]§9。也可参阅 13.7，14.4 中提到的文献。

我们看到，前述讨论中并没有导出旋量的概念，这一点是耐人寻味的；旋量表示是 Elie Cartan 在 1913 年研究 $O^+(n)$ 的 Lie 代数的本原不可约线性表示的分类时发现的。在进行这一分类时，其中有一类是前所未知的，而且它的维数出乎意料地竟是 2^n。相反地，Clifford 却是在 1876 年企图将 8.9.2 和 8.9.8 这样的理论推广到更高维时找到他的代数的。

8.10.4 至于 $O^+(n)$ 的代数拓扑的其它经典不变量：同调群，上同调环，这些都已完全研究清楚。可参阅 [BO1] 或 [HU]，第 92—95 页。

8.11 定向欧氏空间的典范体积形式．混合积，向量积

我们还记得，若 $n=\dim E$，则有 $\Lambda^n E^*=1$（参见 2.7.2.1）。

8.11.1 引理． 若 E 是欧氏空间，则 $\Lambda^n E^*$ 具有一个典范欧氏结构（即有一范数）定义如下：

$$\|\omega\|=|\omega(e_1,\cdots,e_n)|,$$

其中 ω 是 $\Lambda^n E^*$ 的任一元素，(e_i) 是 E 的任一标准正交基。

由于 $\omega\in\Lambda^n E^*$ 由它在 E 的一个基上的值所决定，所以只须证明对任何两个标准正交基总有 $|\omega(e_1,\cdots,e_n)|=|\omega(e'_1,\cdots,e'_n)|$

即可；然而若 $f\in \mathrm{GL}(E)$ 由 $f(e_i)=e'_i\ \forall i=1,\cdots,n$ 所定义，则有

$$\omega(e'_1,\cdots,e'_n)=(\det f)\omega(e_1,\cdots,e_n),$$

但由 8.2.1 有 $\det f=\pm 1$.

8.11.2 附注. 更一般地，对任何 p，外代数 $\Lambda^p E^*$，$\Lambda^p E$，张量代数 $\overset{p}{\otimes} E$，$\overset{p}{\otimes} E^*$，对称代数 $\overset{p}{\bigcirc} E$，$\overset{p}{\bigcirc} E^*$ 都具有从 E 的欧氏结构自然继承的欧氏结构：参见 [Bl 2]，第 115 页. 在本书中我们只用到 $\Lambda^n E^*$ 的情形.

8.11.3 定义. 设 E 是定向欧氏向量空间；元素 $\lambda_E\in\Lambda^n E^*$ 称为 E 的**典范体积形式**，如果在 8.11.1 的意义下有 $\|\lambda_E\|=1$ 而且它附属于 E 的定向(参见 2.7.2.2). $n=3$ 时也称为**混合积**，有时记为 $(\cdot,\cdot,\cdot)$.

设 E 是欧氏向量空间；由 $(e_1,\cdots,e_n)\to|\lambda_E(e_1,\cdots,e_n)|$ 定义的映射 $\delta_E:E^n\to\mathbf{R}_+$ 称为 E 的**典范密度**，其中 λ_E 是在任一定向下 E 的典范体积形式.

换一个说法，λ_E 和 δ_E 具有以下特征：

8.11.4 $\delta_E(e_1,\cdots,e_n)=1$ (相应地，$\lambda_E(e_1,\cdots,e_n)=1$) $\forall$标准正交基(相应地，正向标准正交基) (e_i).

显然 δ_E 在 $O(E)$ 下不变，而 λ_E 则在 $O^+(E)$ 下不变.

8.11.5 为了计算 $\delta_E(x_1,\cdots,x_n)$，我们引进 Gram 行列式：设 E 是欧氏空间，$(x_i)_{i=1,\cdots,p}$ 是 E 中 p 个元素所成的子集，下述行列式称为 (x_i) 的 Gram 行列式，并记为 $\mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_p)$：

$$\mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_p)=\det((x_i|x_j))$$

$$=\begin{vmatrix}\|x_1\|^2 & (x_1|x_2)\cdots(x_1|x_p)\\ (x_1,x_2) & \|x_2\|^2\ \cdots(x_2|x_p)\\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots\\ (x_p|x_1) & (x_p|x_2)\cdots\ \|x_p\|^2\end{vmatrix}.$$

8.11.6 命题. 对 E 的任何子集 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 恒有 $\delta_E(x_1,\cdots,x_n)=(\mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_n))^{1/2}$.

设 (e_i) 是任一标准正交基，

$$f\in \mathrm{GL}(E)\,|\,f(e_i)=x_i\ \forall i=1,\cdots,n,$$
而 $A=M(f)$ 是 f 关于 (e_i) 的矩阵. 由引理 8.2.2 有

$$\mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_n)=\det({}^tAA)=(\det A)^2=(\det f)^2;$$
由此即得

$$\delta_E(x_1,\cdots,x_n)=|\det f|\,\delta_E(e_1,\cdots,e_n)=|\det f|.$$

8.11.7 例. 取 $x,y\in E$ 并将 8.11.6 应用于欧氏空间

$$V=\mathbf{R}x+\mathbf{R}y;$$
我们有

$$\delta_V(x,y)=(\mathrm{Gram}(x,y))^{1/2},$$
因此 $\mathrm{Gram}(x,y)\geqslant 0$; 然而

$$\mathrm{Gram}\,(x,y)=\begin{vmatrix}\|x\|^2 & (x|y)\\ (y|x) & \|y\|^2\end{vmatrix}=\|x\|^2\|y\|^2-(x|y)^2,$$
这样就证明了 Schwarz 不等式(参见 8.1.3). 而且, 由 8.6.3 有

$$\delta_V(x,y)=\sin\,(\widehat{\mathbf{R}x,\mathbf{R}y})\|x\|\|y\|,$$
其中含有两条直线 $\mathbf{R}x,\mathbf{R}y$ 的(无定向)夹角的信息.

对于三个向量,读者可直接证明行列式 $\mathrm{Gram}\,(x,y,z)$ 恒为正的.

以下讨论向量积. 对于三维空间中所有涉及物理世界的研究来说,这是极其有用的.

以下设 E 是定向的.

8.11.8 命题. 设 E 的维数 $n\geqslant 3$. 若已给定 E 中 $n-1$ 个向量 $(x_i)_{i=1,\cdots,n-1}$, 则存在 E 中唯一的向量,记作 $x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}$, 使

$$\forall y\in E:(x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}|y)=\lambda_E(x_1,\cdots,x_{n-1},y);$$
称之为 x_i 的**向量积**. 它有如下性质:

(i) $E^{n-1}\ni(x_1,\cdots,x_{n-1})\longmapsto x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}\in E$ 是交错多重线性的(从而是反对称的);

(ii) $x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}=0\Longleftrightarrow x_i$ 线性相关;

(iii) $x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}\in(\mathbf{R}x_1+\cdots+\mathbf{R}x_{n-1})^{\perp}$;

(iv) 若 (x_i) 线性无关,则 $\{x_1,\cdots,x_{n-1},x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}\}$ 是

E 的一个正基；

(v) $\|x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}\| = (\mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_{n-1}))^{1/2}$
$= \delta_{\mathbf{R}x_1+\cdots+\mathbf{R}x_{n-1}}(x_1,\cdots,x_{n-1})$;

(vi) $x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}$ 以 (iii),(iv),(v) 三条性质作为特征。

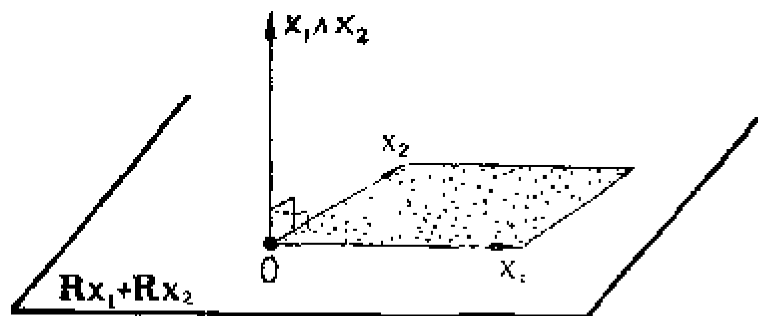


图 8.11.8.

存在性和唯一性都可由 8.1.8.1 推出. (i) 则是 λ_E 交错多重线性的推论. (ii) 的⇐部分是显然的；对⇒部分，若 x_i 线性无关，则可添上 x_n 使之成为一个基，于是有

$$(x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}|x_n) = \lambda_E(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n) \neq 0,$$

得出矛盾. 为证 (iv)，应用 2.7.2.2 得

$$\lambda_E(x_1,\cdots,x_{n-1},x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}) = \|x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}\|^2 > 0.$$

为证 (v)，令 $z = x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}$，并注意到

$$(z|x_i) = 0 \quad \forall i = 1,\cdots,n-1,$$

另外，根据 Gram 行列式的定义：

$$\mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_{n-1},z) = \mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_{n-1})\|z\|^2,$$

因此

$$(\lambda_E(x_1,\cdots,x_{n-1},z))^2 = \|z\|^4 = \mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_{n-1},z)$$
$$= \mathrm{Gram}(x_1,\cdots,x_{n-1})\|z\|^2 \text{ (参见 8.11.6)}.$$

最后，为了证明 (iii),(iv),(v) 构成向量积的特征，只须考虑 x_i 线性无关的情形(否则出现的是零向量)，这时

$$\dim(\mathbf{R}x_1 + \cdots + \mathbf{R}x_{n-1})^\perp = 1,$$

于是在这条向量直线上 (iv) 和 (v) 确定了唯一的向量。

8.11.9 注. $n=2$ 时，起向量积作用的是映射 $E \ni x \longmapsto \partial(x) \in E$，即 E 中以直角为转角的旋转：参见 8.3.12 和 8.7.3.5.

向量积的概念提供了一种把标准正交基 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n-1}$ 扩充成一个标准正交正基的很方便的方法，实际的计算将在 8.11.11，8.11.12 给出.

8.11.10 具体计算. 设 (e_i) 是 E 的标准正交基，矩阵

$$A=(x_1\cdots x_{n-1})=(x_{ij})(i=1,\cdots,n-1;j=1,\cdots,n)$$

是在该基下以 x_i 为列向量的矩阵，则

8.11.11 $x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}$ 的第 i 个坐标 $=(-1)^{n-i}\det A_i$，其中 A_i 表示在 A 中去掉第 i 行后所得出的方阵. 为证明这一点，令

$$z=x_1\wedge\cdots\wedge x_{n-1}=(z_1,\cdots,z_n)$$

并按行列式的最后一列将行列式展开：

$$\begin{aligned}(z|y)&=\lambda_E(x_1,\cdots,x_{n-1},y)\\&=\begin{vmatrix}x_{11}&\cdots&x_{n-1\,1}&y_1\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ x_{1n}&\cdots&x_{n-1\,n}&y_n\end{vmatrix}\\&=\sum_i(-1)^{n-i}y_i\det A_i=\sum_i y_iz_i.\end{aligned}$$

上式对任何 y_i 都正确，这样就证明了上述结论. 比如说 $n=3$ 时就有

8.11.12

$$x=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix};\quad x\wedge y=\begin{pmatrix}bc'-b'c\\ca'-c'a\\ab'-a'b\end{pmatrix}.$$

8.11.13 四元数. $\mathbf{R}^3$（具有欧氏结构及典范定向）中的向量积使我们能很容易地写出两个纯四元数 $x,y\in\mathbf{R}^3\subset\mathbf{H}$ 的乘积（因而就可写出任意两个四元数的乘积）；由 8.9.1 和 8.11.12 有

$$xy=-(x|y)+x\wedge y,\ \text{其中}\ (x|y)\in\mathbf{R}\subset\mathbf{H}.$$

8.12 练　　习

8.12.1 设 E 是有限维实向量空间，φ 和 ϕ 是 E 上的两个欧氏结构，$G\subset \mathrm{GL}(E)$ 是 E 的线性群的一个子群；假使 G 是不可约的(参见 8.2.6)。 证明若 $G\subset O(E,\varphi)\cap O(E,\phi)$ (即若 G 的每一元素都使 φ 和 ϕ 不变)，则 φ 和 ϕ 成比例(利用 13.5)。

8.12.2 8.2.15 的几何证明. 为证 $f\in O(E)$ 具有一条特征直线或一个特征平面，考虑一点 $x\in S(E)$ 使 $\|f(x)-x\|$ 极小，并证明 $x, f(x)$ 和 $f^2(x)$ 处在同一平面内(参见 9.3.2 并利用 18.4)。

8.12.3 8.2.15 的微分证明. 在与 8.12.2 相同的情形下，通过算出映射

$$S(E)\ni y\longmapsto \|f(y)-y\|\in \mathbf{R}$$

在 x 的导数为零（参见 13.5.7.2)，证明 x 和 $f(x)$ 的平面在 f 下是稳定的。

8.12.4 直接证明圆周是弧连通的。

8.12.5 正规自同态. 欧氏空间的自同态 f 称为正规自同态，如果它与自身的伴随自同态可交换：${}^t f\circ f=f\circ {}^t f$ (参见 8.1.8.6)。证明 8.2.15 对正规自同态也成立。对此也可参阅 13.5.7。当

$$\dim E=2$$

时，正规自同态是什么？

8.12.6 在 $\dim E=2$ 时，确定所有连续的同态 $R\to \mathrm{GO}(E)$；画出相应的轨道(参见 9.6.9)(利用 8.3.13)。

8.12.7 证明：对任何 $n\in \mathbf{N}^*$ 和 $a\in\widetilde{\mathfrak{A}}(E)$，$\widetilde{\mathfrak{A}}(E)$ 中的方程 $nx=a$ 恰有 n 个解。在一个圆周上分别对某个 a 和 $n=2,3,4,5$ 表示出这些解。

8.12.8 三角公式汇编. 在下列待证的公式中，整数 $n\in \mathbf{N}$ 和其中出现的实数都是任取的；按常例令

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

$$\operatorname{tg} na=\frac{\binom{n}{1}\operatorname{tg} a-\binom{n}{3}\operatorname{tg}^3 a+\cdots+(-1)^p\binom{n}{2p+1}\operatorname{tg}^{2p+1} a+\cdots}{1-\binom{n}{2}\operatorname{tg}^2 a+\cdots+(-1)^p\binom{n}{2p}\operatorname{tg}^{2p} a+\cdots};$$

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2};$$

写出相应的正弦和差公式;

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cdot\cos b};$$

证明 $\alpha\cos t+\beta\sin t$, $t\in\mathbf{R}$ 的最大值是 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; 对使

$$a+b+c=\pi$$

的正数 a, b, c, 证明:

$$\sin a+\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2},$$

$$\cos a+\cos b+\cos c=4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2};$$

$$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg} b\cdot\operatorname{tg} c,$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}+\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}=1;$$

$$\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4};\quad \cos\frac{\pi}{48}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$1+\cos a+\cdots+\cos na=\frac{\sin(n+1)\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cos\frac{na}{2},$$

$$\sin a+\cdots+\sin na=\frac{\sin(n+1)\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\sin\frac{na}{2};$$

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=n2^{1-n};$$

$$\cos a+\cos 3a+\cdots+\cos(2n-1)a=\frac{1}{2}\,\frac{\sin 2na}{\sin a};$$

$$\sin a+\sin 3a+\cdots+\sin(2n-1)a=\frac{\sin^2 na}{\sin a};$$

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{4}\cdots\cos\frac{a}{2^n}=\frac{\sin a}{a}.$$

8.12.9 $\mathbf{R}^3$ 中的向量积. 证明下列公式(对于任何 a,b,c):

$$a\wedge(b\wedge c)=(a|c)b-(a|b)c,$$
$$(a\wedge b,a\wedge c,b\wedge c)=(a,b,c)^2,$$
$$(a\wedge b)\wedge(a\wedge c)=(a,b,c)a.$$

证明 $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\ni(a,b)\longmapsto a\wedge b\in\mathbf{R}^3$ 连带上加法使 $\mathbf{R}^3$ 成为一个非结合代数,而它满足 Jacobi 恒等式

$$a\wedge(b\wedge c)+b\wedge(c\wedge a)+c\wedge(a\wedge b)=0,$$

也就是说是一个 Lie 代数.

若 p,q,r 分别是到三个坐标平面上的投影,证明

$$\|a\wedge b\|^2=\mathrm{Gram}(p(a),p(b))+\mathrm{Gram}(q(a),q(b))$$
$$+\mathrm{Gram}(r(a),r(b)).$$

试用平行四边形的面积来解释上式(见图 8.12.9). 写出在 n 维空

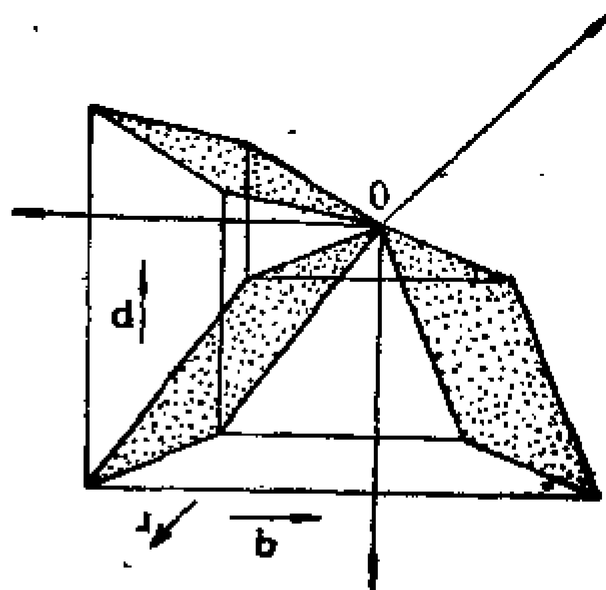


图 8.12.9.

间中关于 Gram $(a_1, \cdots, a_p)$ 的推广公式(p 和 n 都是任意的)。

讨论方程 $x\wedge a = b$(a, b 已给定)的解集合的存在性及性质.

8.12.10 在 3 维欧氏向量空间中，设 A, B 是两条半直线且 $B\neq -A$，则在 A, B 所决定的平面上作为介于 A, B 之间的 A, B 平分线的这条半直线称为 A, B 在空间的平分线（参见 8.7.5.2 和 8.7.3.3）。设已给定三条半直线 S, T, U，试求三条半直线 A, B, C，使 S 是 A, B 的平分线，T 是 B, C 的平分线，而 U 是 C, A 的平分线. 对更多的半直线讨论同样的问题.

8.12.11 **H 的自同构.** 证明 **H** 的每一自同构都形如

$$a\longmapsto \mathscr{R}(a)+\rho(\mathscr{P}(a)),\ \text{其中}\ \rho\in O^{+}(3).$$

8.12.12 具体计算旋转的合成，尤其是 12.5.5.3 中由坐标给出的二十面体的 3 阶及 5 阶旋转.

8.12.13 证明一个紧群的有限维线性表示总是半单的，即：设 G 是紧群，$f: G\to \mathrm{GL}(V)$ 是 G 到有限维实向量空间 V 的线性群 $\mathrm{GL}(V)$ 中的同态，则若存在向量子空间 $W\subset V$ 使 $f(g)(W)=W\ \forall g\in G$，试证存在直和 $V=W\oplus Z$ 使

$$f(g)(Z)=Z\quad \forall g\in G.$$

8.12.14 若 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 是 n 维欧氏空间的标准正交基，具体写出如 8.4.1 所述的对 $O(n)$ 中如下定义的元素 f 的约化：

$$f(e_i)=e_{i+1}\ \forall i=1,\cdots,n-1,\ f(e_n)=e_1.$$

第9章 欧氏仿射空间

本章讨论(至少在2维和3维的情形下)希腊人的古典几何学以及我们今天的物理世界中所碰到的空间. 由于这种结构的内涵极为丰富,且已历经几千年的研究, 所以材料很浩繁,我们势必要有所选择.本书选择的原则是: 尽快地引出基本的结论,时常给出一些看来简单有趣而实际上证明很难的结果, 最后还要介绍一些与讨论内容很接近,但更为困难而且至今尚在研究之中的问题.

前三章除介绍一些基本结论外, 还在 9.2 节给出了具体计算距离的公式;其中 Gram 行列式起了重要的作用,在 9.7 中也还将碰到这种行列式.

9.4 节把9.3 节中关于平面等距结构的结论用于内接于一个凸多边形的极小周长多边形问题, 并联系到台球(弹子)或光线的轨道问题;这在某种意义上是与台球遍历性问题相对的问题.

9.5 节讨论相似性并给出一些并非显然的特征,其中特别包括 Liouville 定理. 9.6 节利用平面相似求解几个具体问题: 相似分割,两个圆的双重垂足轨迹,对数螺线.

后面七节内容较杂,是为以后的内容作一些准备的;但其中介绍的概念仍是很基本的. 第 9.7 节讨论若干点的相互距离的关系式,并提及欧氏仿射空间的纯度量分类问题;这里 Cayley-Menger 行列式是一个重要的工具. 第 9.8 节研究使已给子集不动的子群,尤其是群的紧性与一个公共不动点的存在性之间的关系. 第 9.9 节讨论曲线的长度以及两点间的最短路径. 第 9.10 节中, 利用微分学把距离函数关于端点求导并介绍相应的应用, 这就是第一变分公式. 第 9.11 节把度量推广到空间的所有紧子集的集合上. 这就是 Hausdorff 距离, 它在第 12 章将起重要作用. 第 9.12 节定义欧氏仿射空间的典范测度;由此特别就可引进紧集体积的概念,

而这种体积正是我们最常用的；第 12 章还会讨论这个问题。最后，第 9.13 节介绍 Steiner 对称，它在历史上曾起过重要作用，而且在等周不等式的证明中也要用到（第 12 章）；在该节中则已借助于这种对称证明了 Bieberbach 等径不等式。

关于练习，除了本章末给出的习题外，建议读者浏览一下为数众多的文献：[HD1]，[HD2]，[R-C1]，[R-C2]，[I-R]，[D-C1]，[FL]，[PE1]，[CR1]；其中有些图形之精采是无可置疑的。

本章中，除非另作声明，X 总表示一个欧氏仿射空间；$n = \dim X$ 则是它的维数。

9.1 定义．等距．位移

9.1.1 定义． 欧氏仿射空间是指一个仿射空间 $(X, \vec{X})$，其中 $\vec{X}$ 是欧氏向量空间．X 的标架 $\{x_i\}_{i=0,\cdots,n}$ 称为标准正交标架，如果 $\{\overrightarrow{x_0x_i}\}_{i=1,\cdots,n}$ 是 $\vec{X}$ 的标准正交基，我们在 X 加上一个由 $d(x, y) = xy = \|\overrightarrow{xy}\|$ 定义的度量空间结构．

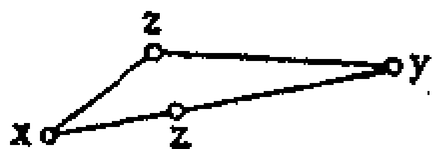


图 9.1.1.

9.1.1.1 严格的三角形不等式． $xz = xy + yz$ 的充要条件是 $z \in [x, y]$，即 z 位于以 x，y 为端点的线段上（参见 3.4.3）．这可由 8.1.3 直接推出．

9.1.2 注． 度量空间的拓扑就是 2.7.1.1 中 X 的典范拓扑．若 $S \subset X$ 是 X 的（仿射）子空间，则 S 由 X 处继承一个自然的欧氏仿射空间结构．

n 维标准欧氏空间是指 $X = \mathbf{R}^n$，其中 $\vec{X} = \mathbf{R}^n$ 是 n 维标准欧氏向量空间：见 8.1.2.2．两个欧氏仿射空间 X，Y 之间的等距，是指使 f 成为等距的双射 $f: X \to Y$，即 $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$

$\forall x, y \in X$；每个 n 维欧氏仿射空间都等距于标准空间 $\mathbf{R}^n$. 为说明这一点，取 X 的标准正交标架 $\{x_i\}$ 并定义 $f: X \to \mathbf{R}^n$ 为

$$f\left(x_0 + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i}\right) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

这说明了"n 维欧氏空间"这个名称也是言之有理的，但我们仍将很审慎地使用这个名称. X 的平移 $T(X)$，更一般地说，凡是使 $\vec{f} \in O(\vec{X})$ 的 $f \in GA(X)$ 都是 X 的等距，它们的全体记作 $\mathrm{Is}(X)$（参见 0.3），因为由 2.3.2 和 8.1.5 有 $d(f(x), f(y)) = \|\overrightarrow{f(x)f(y)}\| = \|\vec{f}(\overrightarrow{xy})\| = \|\overrightarrow{xy}\| = d(x, y)$. 事实上 $\mathrm{Is}(X)$ 中已并无其它元素：

9.1.3 命题. 设 $f: X \circlearrowleft$；则 $f \in \mathrm{Is}(x)$ 的充要条件是 $f \in GA(x)$ 且 $\vec{f} \in O(\vec{X})$.

任取 $a \in X$，设 $t = t_{\overrightarrow{f(a)a}}$ 是以 $\overrightarrow{f(a)a}$ 为平移向量的平移，则 $g = t \circ f \in \mathrm{Is}_a(X)$ 从而 $T(X) \subset \mathrm{Is}(X)$. 只要证明 $g \in O(X_a)$ 即可，但若利用等距的定义及 8.1.2.4 在 X_a 中进行计算，可得出 $(g(x)|g(y)) = (x|y)\ \forall x, y \in X$，再由 8.1.5 即可知 $g \in O(X_a)$.

9.1.4 命题. 令 $\mathrm{Is}^{\pm}(X) = \{f \in \mathrm{Is}(X): \vec{f} \in O^{\pm}(X)\}$；$\mathrm{Is}^+(X)$（相应地，$\mathrm{Is}^-(X)$）的元素称为位移（相应地，逆位移）. 对任一 $a \in X$，相应地有一个半直积

$$\mathrm{Is}(X) = T(X)\mathrm{Is}_a(X)\ (\text{或}\ \mathrm{Is}^+(X) = T(X)\mathrm{Is}_a^+(X))$$

和一个集论意义下的乘积

$$\mathrm{Is}^-(X) = T(X) \times \mathrm{Is}_a^-(X);$$

此外，$f \longmapsto \vec{f}$ 诱导出一个群同构 $\mathrm{Is}_a(X) \to O(\vec{X})$（或 $\mathrm{Is}_a^+(X) \to O^+(\vec{X})$）. 在由 $GA(X)$ 诱导的拓扑下（参见 2.7.1.4），空间 $\mathrm{Is}(X)$ 恰有两个连通分支 $\mathrm{Is}^+(X)$，$\mathrm{Is}^-(X)$，而且它们还是弧连通的.

$\mathrm{Is}^+(X)$ 弧连通的事实为 $f \in \mathrm{Is}^+(X)$ 取名"位移"提出了理由，因为这样就存在 $F: [0, 1] \ni t \longmapsto \mathrm{Is}^+(X)$ 连续且使 $F(0) = \mathrm{Id}_X$，$F(1) = f$；于是这个 F 是 X 中的一个位移，而它正是 f. 如果把 $F(t)$ 作用于 X 的一个固定子集 C，并画出 $C(t) = F(t)(C)$，情况就更直观了.

9.1.5 所以可将 X 写成一个齐性空间：$X = \mathrm{Is}(X)/\mathrm{Is}_a(X)$



图 9.1.4.

(a 是给定的)．这一写法往往比另两种写法 $X = X_a$ 和 $X = GA(X)/GA_a(X)$ 更为有趣；后面的第一种写法是仿射空间的定义，迷向群为零，第二种写法中迷向群 $GA_a(X)$ 稍大一些，而 $Is_a(X)$ 是紧的．不过，就下述意义而言，$Is(X)$ 仍然是相当大的：

9.1.6 命题. $Is(X)$ 在 X 的标准正交标架上是单可迁的，而且它在下述意义上在 X 上双重可迁(参看 1.4.5)：不论 a, b, a', b' 是 X 的怎样四个点，只要 $a'b' = ab$，就必然存在 $f \in Is(X)$ 使 $f(a) = a'$，$f(b) = b'$．若还有 $\dim X = 2$ 和 $f \in Is^+(X)$，则这样的 f 是唯一的．

这一命题可由 8.2.7 推出．

9.1.7 附注. 刚才特地提到欧氏仿射空间上群 $Is(X)$ 的双重可迁性，是有如下原因的：这一条件表面上看起来很弱，实际上却是很强的．稍为附加一些正则性条件以后，等距群双重可迁的度量空间是我们所完全掌握的．除欧氏仿射空间外，在本书中还会碰到另外三种空间：第 18 章的球面，第 19 章的实射影空间和双曲空间．此外还有复射影空间，四元数体，Cayley 八元数的射影平面以及它们对应的非紧空间．关于这方面的较新的参考资料是 [BU2] 第 95 页．也可参阅 [B-K] 第 117 页和 [PV2]．

9.2 正交子空间；距离

9.2.1 原则上的定义. 对于 X 的(仿射)子空间，定义正交性、交

角、定向角等概念时，都把它们看作 $\vec{X}$ 中相应方向的对应概念，正如对于X的定向直线所作的一样. 举例来说，若 D, D' 是X的两条直线，则它们(在 $[0, \pi/2]$ 上的)交角就是 $\overline{DD'} = \overline{\vec{D}\vec{D'}}$；两条正交直线则记为 $D \perp D'$.

9.2.2 命题. 设 S 是子空间，x 是其中一点，则存在唯一的子空间T含有x 并使 $\vec{X} = \vec{S} \overset{\perp}{\oplus} \vec{T}$；点 $y = S \cap T$ (参见 2.4.9.4)的特征是 $xy = d(x, S) = \inf\{xz : z \in S\}$，该数称为$x$ 到 S 的距离 (参见 0.3). 距离 xz 是距离 yz 的严格递增函数.

由于$(\overrightarrow{xy}|\overrightarrow{yz}) = 0$，有(参见 8.1.2.4): $xz^2 = xy^2 + yz^2$，而函数 $t \longmapsto \sqrt{1+t^2}$ 是严格递增的.

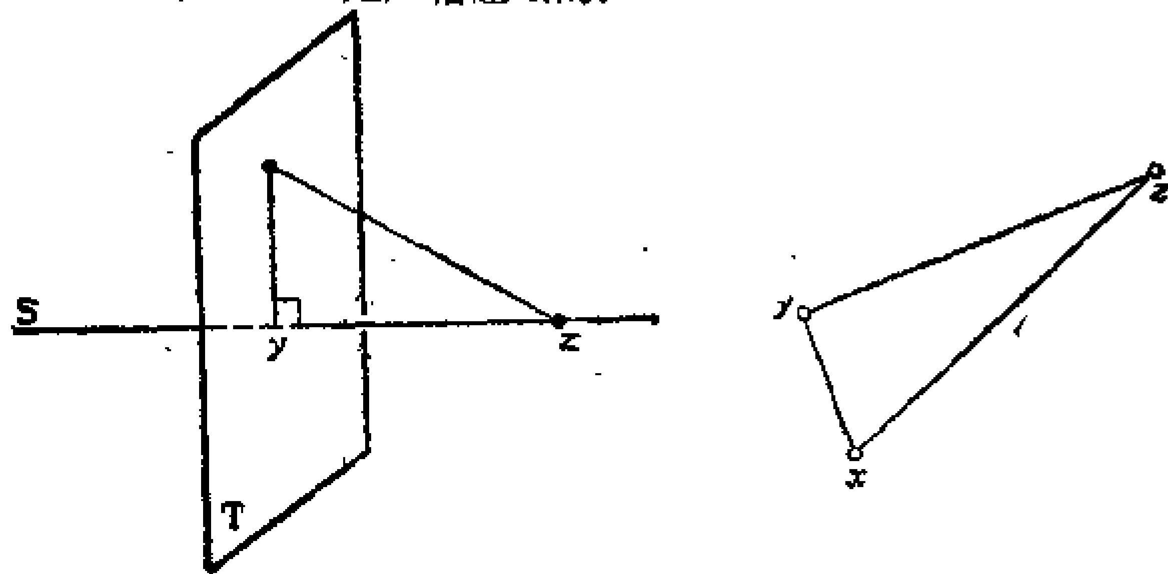


图 9.2.2.

9.2.3 注. 由上可见，对于 X 中三个不同的点 x, y, z，恒有: $xy^2 + yz^2 = xz^2 \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle \perp \langle y, z\rangle$；这就是"Pythagoras 定理"，在欧氏几何的公理体系下，其证明是相当繁冗的.

9.2.4 投影与对称. 在X中固定一个子空间 S. 命题 9.2.2 提供了一个映射 π_S: $X \to S$，其中 $p(x)$ 表示 9.2.2 中唯一的 y，这个映射称为X到S上的正交投影. 由 $\sigma_S(X) = x + 2\overrightarrow{x\pi_S(x)}$ (或者说 $\pi_S(x)$ 是x 和 $\sigma_S(x)$ 的中点) 定义的映射 $\sigma_S: X\circlearrowleft$ 称为关于 S 的对称; $\sigma_S \in \mathrm{Is}(X)$. 反之 $\mathrm{Is}(X)$ 中的每一对合都是某个 σ_S，这里 S 是适当的子空间. 若 S 是超平面(相应地，$\dim S = \dim X -$

2)，则 σ_S 称为超平面对称(相应地，中心对称)．

在对合的情形，一定有一个不动点，因为当 $f^2=\mathrm{Id}_X$ 时 $\dfrac{x+f(x)}{2}$ 在 f 下不动；因此就归结为欧氏向量空间中的类似问题，对此可应用 8.2.9.

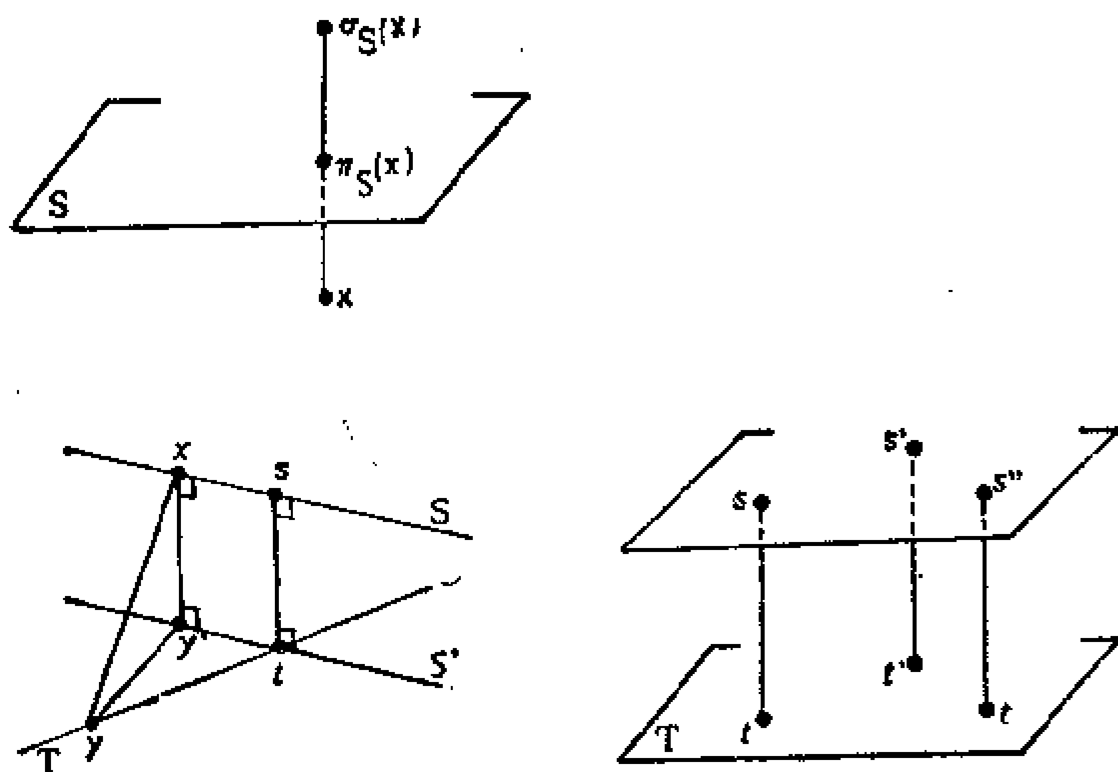


图 9.2.4.

9.2.5 两个子空间的距离． 设 S, T 是两个子空间；令(参见 0.3) $d(S,T)=\inf\{st: s\in S, t\in T\}$ 并称之为 S 与 T 之间的距离． 必然存在 $s\in S$, $t\in T$ 使 $st=d(S,T)$；这一点对的特征是 $\overrightarrow{st}\in(\vec{S})^\perp\cap(\vec{T})^\perp$ (若 $S\cap T=\varnothing$)． 这一点对唯一的充要条件是 $\vec{S}\cap\vec{T}=\{0\}$.

请读者自行用代数方式证明存在性；因为也可利用紧性加以证明．根据 9.2.2，条件 $\overrightarrow{st}\in(\vec{S})^\perp\cap(\vec{T})^\perp$ 是必不可少的；反过来，若满足该条件，设 $x\in S$, $y\in T$ 是任意两点，S' 是由 t 作成的平行于 S 的子空间(参见 2.4.9.2)，而 $y'=\pi_{S'}(x)$，则有 $(\overrightarrow{xy'}|\overrightarrow{y'y})=0$，因此 $xy\geqslant xy'=st$，证毕． 唯一性的准则仍是 $\overrightarrow{st}\in(\vec{S})^\perp\cap$

$(\vec{T})^{\perp}$; 因为若

$$st = s't' = d(S, T),$$

则有 $\overrightarrow{ss'} = \overrightarrow{tt'} \in \vec{S} \cap \vec{T}$.

9.2.6 具体计算. 下面给出一些公式，用它们可以解决一大批常用的计算问题，特别是对 3 维的情形. 我们并未用标准正交基和坐标进行计算，在那种情况下的公式可从下列公式及 8.1.2.6, 8.11.5, 8.11.11 推出. E 已被定向，以便应用 8.11 整节.

9.2.6.1 设 S 是 X 的子空间，$x \in X$，$\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,k}$ 是 S 的一个标架但不必一定是标准正交基；则

9.2.6.2
$$d^2(x, S) = \frac{\mathrm{Gram}(\overrightarrow{x_0x}, \overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k})}{\mathrm{Gram}(\overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k})}.$$

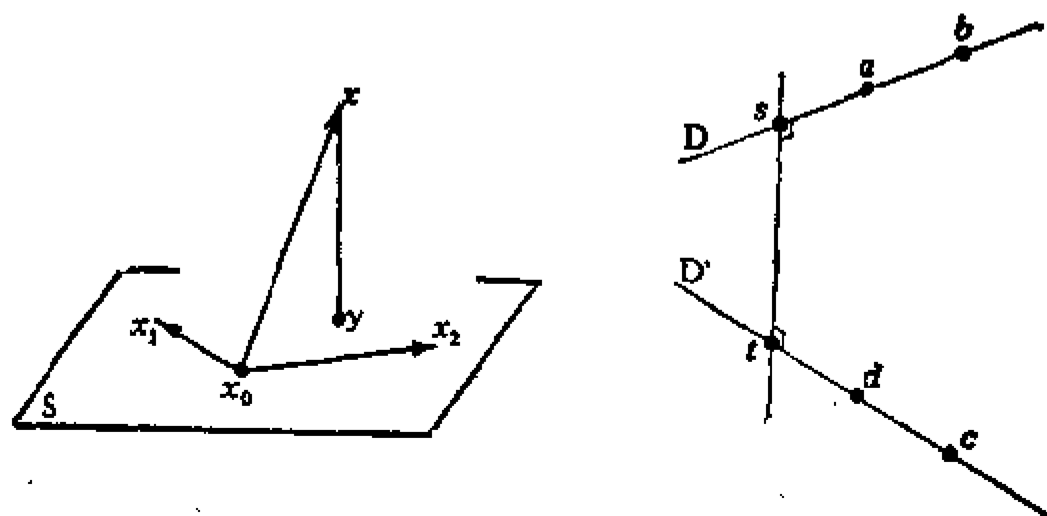


图 9.2.6.2.

事实上，设 $y = \pi_S(x)$，根据 8.11.6，在 Gram 行列式的一个向量上加上其余向量的线性组合后，Gram 行列式保持不变，特别就有

$$\mathrm{Gram}(\overrightarrow{x_0x}, \overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k}) = \mathrm{Gram}(\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k}),$$

但在 8.11.8 (v) 的证明中我们已知后一项等于

$$\|\overrightarrow{xy}\|^2 \mathrm{Gram}(\overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k}).$$

9.2.6.3 设 $H = f^{-1}(0)$ 是 X 的超平面，其中 $f \in A(X; \mathbf{R})$ (参见 2.7.3.1)，则对 $x \in X$ 有

9.2.6.4 $$d(x, H) = \frac{|f(x)|}{\|\vec{f}\|},$$
其中$\|\cdot\|$表示 $(\vec{X})^*$ 中的典范范数(参见 8.1.8.2).

事实上，设 $y = \pi_H(x)$；则有 $f(y) = 0$，由此即得 $f(x) - f(y) = f(x) = \vec{f}(\overrightarrow{yx})$. 但 $|\vec{f}(\overrightarrow{yx})| = |(\vec{f}^{\#}|\overrightarrow{yx})| = \|\vec{f}^{\#}\|\|\overrightarrow{yx}\| = \|\vec{f}\| \cdot xy$，这是因为 $\overrightarrow{yx} \in H^{\perp}$ 从而X中的向量 $\vec{f}^{\#}$ 与 $\overrightarrow{yx}$ 是成比例的. 因此可应用 8.1.8.1，8.1.8.2 和 8.1.3.

9.2.6.5 若 D，D' 是X中两条直线，a，$b \in D$，a'，$b' \in D'$，则有
$$d^2(D, D') = \frac{\mathrm{Gram}(\overrightarrow{aa'}, \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{a'b'})}{\mathrm{Gram}(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{a'b'})},$$
引进 s，t 使 $st = d(D, D')$ 则可与 9.2.6.1 相仿地说明上式. 直线 $\langle s, t\rangle$ 通常是唯一的，称为 D，D' 的公垂线.

9.3 $\mathrm{Is}(X)$ 中一个元素的结构. $\mathrm{Is}(X)$ 和 $\mathrm{Is}^+(X)$ 的生成元

关于 $f \in \mathrm{Is}(X)$ 可以提出很多问题：不动点，不变子空间等等；这些问题都可用下述结构定理来解决：

9.3.1 定理. 设 $f \in \mathrm{Is}(X)$，则唯一地存在一个X上的等距g和一个X上的平移 t_ξ 满足下列条件：g 的不动点集G非空，$\vec{\xi} \in \vec{G}$，$f = t_\xi \circ g$. 从而特别有
$$\vec{G} = \mathrm{Ker}\,(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{X}}) \text{ 和 } t_\xi \circ g = g \circ t_\xi.$$
首先注意到 $\vec{X} = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_{\vec{X}}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(s - \mathrm{Id}_{\vec{X}})$ 对任一 $s \in O(\vec{X})$ 都成立；事实上，因维数之和恒与 $\vec{X}$ 的维数相等，故只须说明这两个子空间正交即可，而这可从定义推出：
$$\begin{aligned}(u|s(v) - v) &= (u|s(v)) - (u|v)\\ &= (s(u)|s(v)) - (u|v) = 0.\end{aligned}$$
现在只要把握住证明的起点就行了：任取 $a \in X$，按上述直和将

$\overrightarrow{af(a)}$ 分解成 $\overrightarrow{af(a)}=\vec{\xi}+\vec{h}$，这里 $\vec{h}=\vec{f}(\vec{t})-\vec{t}$，$\vec{f}(\vec{\xi})=\vec{\xi}$. 再令 $x=a-\vec{t}$，则有：

$$\overrightarrow{xf(x)}=\overrightarrow{xa}+\overrightarrow{af(a)}+\overrightarrow{f(a)f(x)}=\vec{t}+\vec{\xi}$$

$$+\vec{f}(\vec{t})-\vec{t}-\vec{f}(\vec{t})=\vec{\xi}.$$

因此，若令 $g=t_{\vec{\xi}}^{-1}\circ f$，则有 $g(x)=x$. 其余的结论是显然的.

关于进一步的细节以及下述推论的证明，均可参阅 [FL] 第 194—197 页.

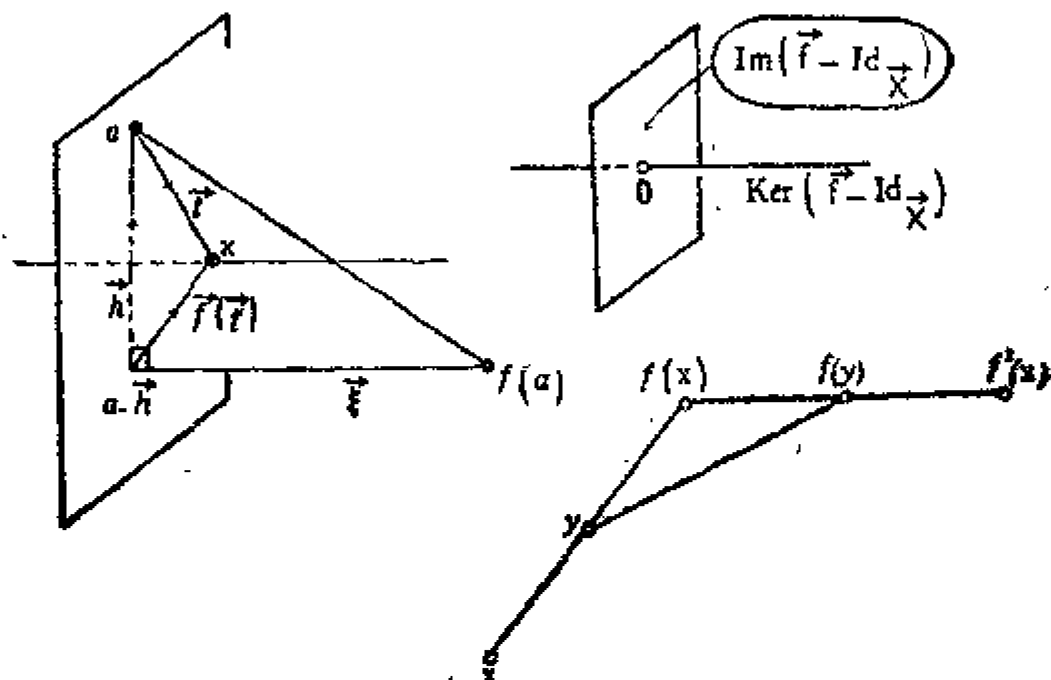


图 9.2.6.4.

9.3.2 注. X 中 $\mathrm{Ker}(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{X}})$ 的平行直线在 f 下整体不变，而若能知道确有一条这样的直线，就能保证 9.3.1 的分解的存在性. 要找到这样的直线，可以用纯粹度量和拓扑的论证方法：若 $x\in X$ 使 $xf(x)=\inf\{yf(y):\ y\in X\}$，则直线 $\langle x, f(x)\rangle$ 在 f 下(整体)不变. 其实，设 y 是 x 和 $f(x)$ 的中点，则因 f 是等距(甚至是仿射映射!)，$f(y)$ 是 $f(x)$ 和 $f^2(x)$ 的中点，由假设条件就有：

$$d(y, f(y))\geqslant d(x, f(x))=d(f(x), f^2(x));$$

然而

$$d(y, f(y)) \leqslant d(y, f(x)) + d(f(x), f(y)) = 2 \times \frac{1}{2} d(x, f(x)).$$

因此必须等式处处成立，而这仅当 $f(x) \in \langle y, f(y)\rangle$ 时才能实现(参见 9.1.1.1 严格的三角形不等式)，因此 x, $f(x)$, $f^2(x)$ 共线.

当然，对三角形 $\{a, a-\vec{h}, f(a)\}$. 应用 9.2.3 可知，9.3.1 中的每一 $x \in \vec{G}$ 都满足 $xf(x) = \inf\{yf(y): y \in X\}$.

9.3.3 推论

(i) 若 $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{X}}) = \{0\}$，则 f 有唯一的不动点(通常称为它的中心)；

(ii) 每一 $f \in \mathrm{Is}(X)$ 是至多 $n+1$ 个超平面对称的乘积，当 f 至少有一个不动点时，这种分解达到最小个数 $s = \dim \vec{X} - \dim(\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{X}}))$，当 f 无不动点时，个数为 $s+2$；

(iii) 每一 $f \in \mathrm{Is}^+(X) \backslash T(X)$ 是 s 个中心对称的乘积，每一 $f \in T(X)$ 是 2 个中心对称的乘积.

由 9.3.1 还可推出下述结论：

9.3.4 平面等距的性质：$n = 2$. 每个 $f \in \mathrm{Is}^+(X) \backslash T(X)$ 有唯一的不动点，称为它的中心；我们也说 f 是以 a 为中心的旋转(因此 f 以其中心及转角 $\Phi^{-1}(\xi) \in \tilde{\mathscr{A}}(\vec{X})$ 作为特征)。每个 $f \in \mathrm{Is}^-(X)$ 有唯一的一条整体不变直线 D 且 f 可唯一地写作 $f = t_{\xi} \circ \sigma_D$，其中 $\vec{\xi} \in \vec{D}$; D 称为 f 的轴.

9.3.5 空间等距的性质：$n = 3$. $\mathrm{Is}^+(X) \backslash \mathrm{Id}_X$ 中具有不动点的元素 f 称为旋转. 根据 8.4.7.1，这个 f 必有唯一的点点不动的直线 D，称作它的轴；f 的转角是常值 $\overline{\Delta f(\Delta)} \in]0, \pi]$，其中 Δ 是一条正交于 D 的定向直线，但该转角(除非它是 π)再加上 D 并不足以确定 f，因为有两种可能. 欲知其详，可参阅 [DE2] 第 156—159 页或 9.14.5. $f \in \mathrm{Is}^+(X) \backslash T(X)$ 称为螺旋运动；它具有一条唯一的整体不变直线 D，称为它的轴，且还可唯一地分解为 $t_{\xi} \circ g$ 的形式，其中 g 是以 D 为轴的旋转，$\vec{\xi} \in \vec{D}$. $\mathrm{Is}^-(X)$ 中有两类不同的元素；一类至少具有一个不动点，它们可写成 $r \circ \sigma_H$ 这样的合成，其中 H 是一个确定的超平面，r 是转轴与 H 正交的一个旋转（或

$t=\mathrm{Id}_X$)，另一类没有不动点，它们可唯一地分解成 $t_{\vec{\xi}}\circ\sigma_H$ 的形式，其中H是确定的超平面而 $\vec{\xi}\in\vec{H}$.

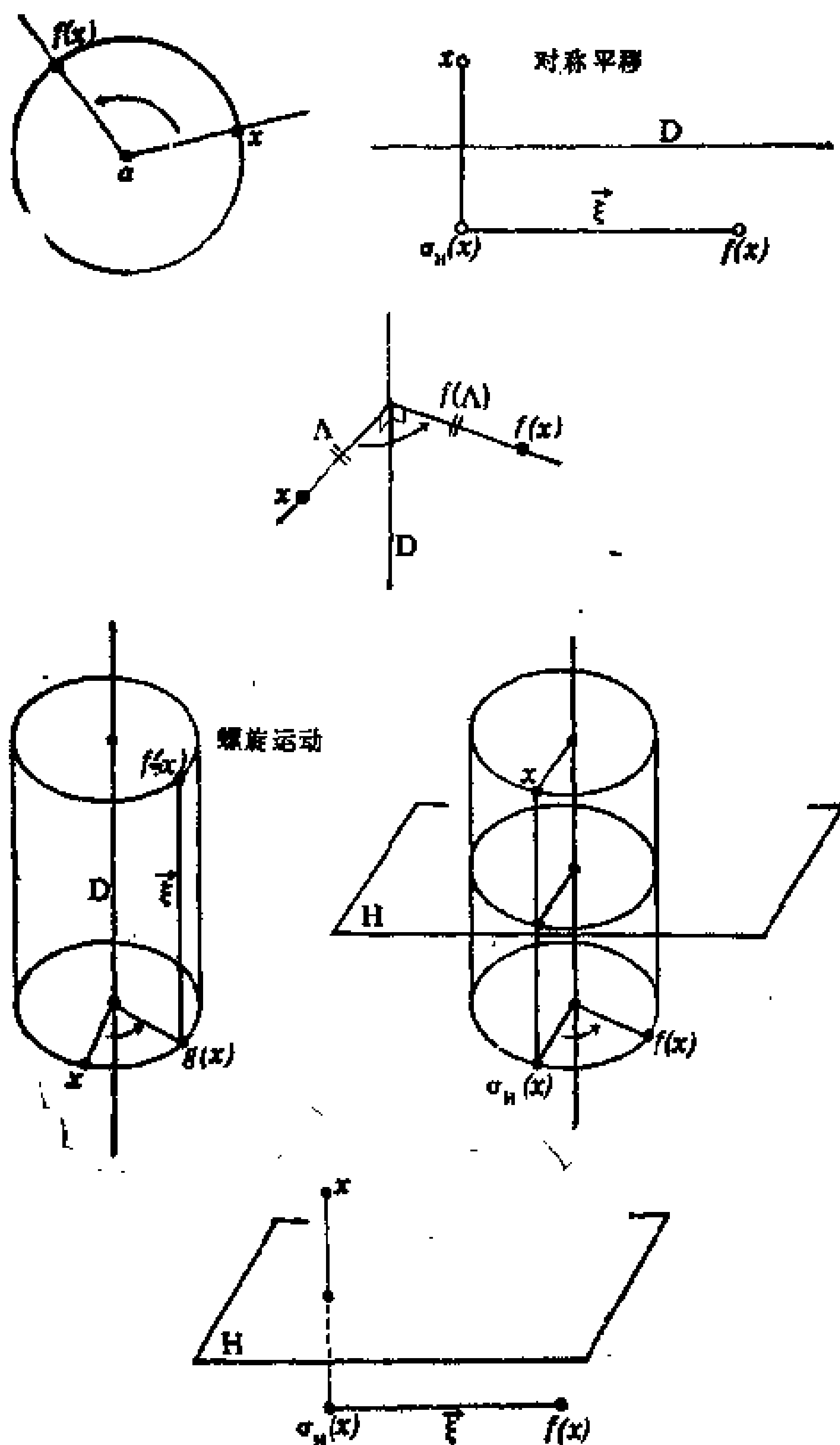


图 9.3.

9.3.6 二维情形的例. 当 $n=2$ 时，我们知道唯一地存在 $f\in$

$\mathrm{Is}^+(X)$（或 $f\in \mathrm{Is}^-(X)$）使 $f(a)=a', f(b)=b'$，其中 a, b, a', b' 是给定的四点且 $ab=a'b'$，这可由 9.1.6 推出．很自然地，我们想要通过几何的构造具体地找出这个 f 来．这是很容易的：现在假定我们要找的是 $f\in \mathrm{Is}^+(X)$，由于$f\in T(X)$ 的情形是显而易见的，f 的中心 ω（参见 9.3.4）必是 a，a' 的垂直平分线和 b，b' 的垂直平分线的交点（参见 9.7.5）；另一种对正向相似也有效的作图法是利用 ω 是通过 $a, a', \langle a, b\rangle\cap\langle a', b'\rangle$ 的圆和通过 $b, b', \langle a, b\rangle\cap\langle a', b'\rangle$ 的圆的交点． 若要找的是 $f\in \mathrm{Is}^-(X)$，只须注意到 f 的轴（参见 9.3.4）应含有 x 和 $f(x)$ 的中点 $(\forall x\in X)$ 即可．

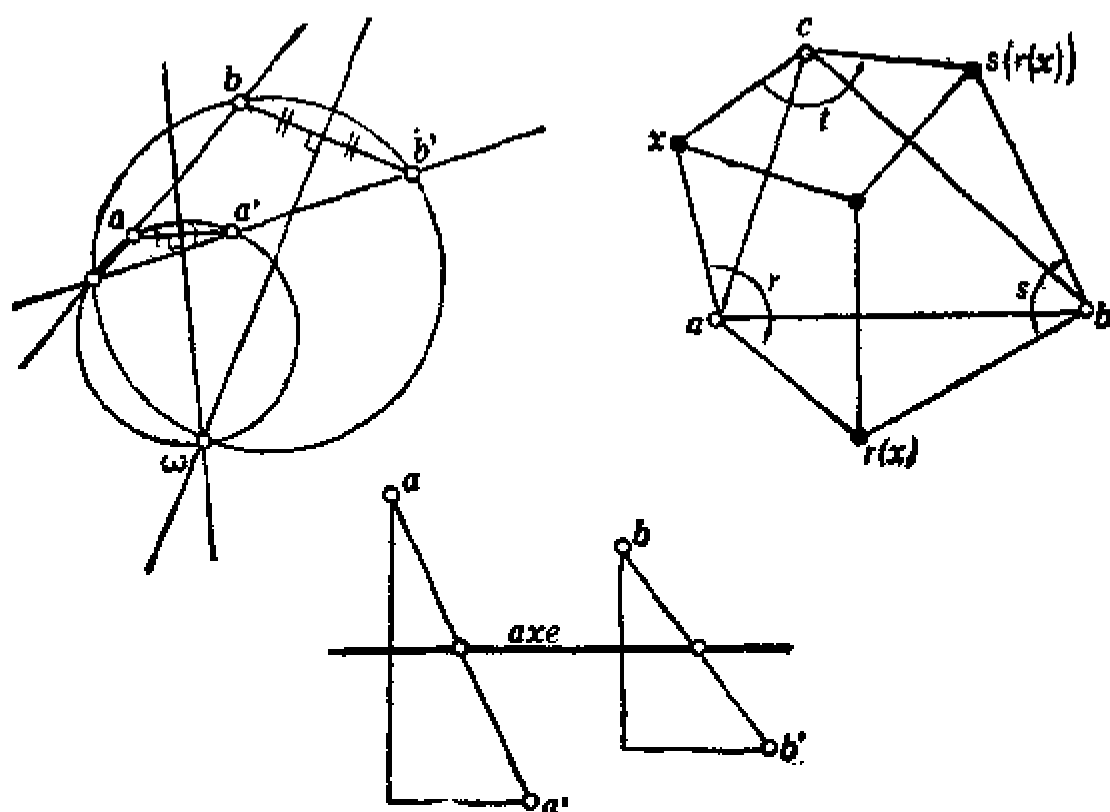


图 9.3.6.

能具体作出合成也是很有用的；在 1.7.5.3 中我们实质上曾经用到了下述结论： 若 r，s 是以 a，b 为中心的两个旋转，又若 $tsr=\mathrm{Id}$，则 t 的中心 c 必使在 $\widetilde{\mathfrak{A}}(\vec{X})$ 中的转角恰好是：r 的是 $2\widehat{\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ab}}$，$s$ 的是 $2\widehat{\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{bc}}$，$t$ 的是 $2\widehat{\overrightarrow{cb}, \overrightarrow{ca}}$.

事实上，我们可应用 8.3.5 并记 $r=\sigma_{\vec{ab}}\sigma_D$，$\delta=\sigma_E\sigma_{\vec{ab}}$，其中

D, E是适当的直线，$a\in D$, $b\in E$；于是 $sr=\sigma_E\sigma_D$ 从而 sr 的中心以及与之相同的 $t=(sr)^{-1}$ 的中心都是 $D\cap E$，由此可知 $c\in D\cap E$. 但这样就有 $r=\sigma_{\overline{ab}}\sigma_{\overline{ac}}$, $s=\sigma_{\overline{bc}}\sigma_{\overline{ab}}$，只须再用 8.7.7.7 即可.

9.3.7 三维情形的例. 在 $n=3$ 的情形，推论 9.3.3(iii) 取下述简单的形式(因而可用初等的方法证明)：若 f 是以 D 为轴、以 $\theta\in]0,\pi]$ 为转角的螺旋运动，其平移向量的模长 $p=\|\vec{\xi}\|$ 称为 f 的步长，则 f 可分解为两个中心对称的乘积 $\sigma_A\sigma_B$，其中直线 A 是任何与 D 正交并与之相交的直线；A 与 B 之间的距离是 $d(A,B)=p/2$，它们的交角是 $\overline{AB}=\theta/2$. 这一分解使我们可以很方便地研究螺旋运动的结构并得出相应的应用：参见 [FL] 第 338—339 页或 9.14.38.

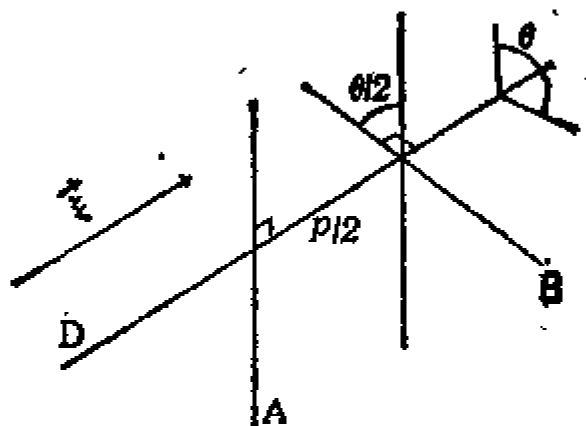


图 9.3.7.

在力学中很自然也会碰到螺旋运动，例如 $Is(X)$ 中的可微曲线的一阶逼近：参见 9.14.7 或 [BE] 第 120 页.

9.4 平面等距的结构与多边形台球

在本节中我们利用平面等距的结构来研究一个比较复杂一些的例子，这个例子中讨论两个相互联系的问题，即多边形台球问题和内接于给定多边形的极小周长多边形问题. 为阅读方便起见，我们先处理三角形的情形，然后扩充到任意多边形；一个有趣的现象是：在边数为偶数的情形跟边数为奇数的情形下，问题的解答是

截然不同的．整个这一节中，X 都是欧氏仿射平面．

9.4.1 三角形的情形． 设 a, b, c 是 X 中给定的三角形；给出 $\{a, b, c\}$ 的一个内接三角形，就是给定三点 α, β, γ 使 $\alpha \in [b, c]$，$\beta \in [c, a]$，$\gamma \in [a, b]$（参见 3.4.3）．$\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 的周长是 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$，参见 10.3 或 12.3.1；若 $\alpha \in]b, c[$，$\beta \in]c, a[$，$\gamma \in]a, b[$ 而且 $\{a, b, c\}$ 的每边都是 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 的外平分线，即在 8.7.3.2 的意义下：$\overrightarrow{bc}$ 是 $\overrightarrow{\gamma\alpha}$，$\overrightarrow{\alpha\beta}$ 的平分线，等等，则称 $\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ 为台球轨道或光线三角形．下述引理给出了台球与极小周长之间的联系：

9.4.1.1 引理． 设已给欧氏平面上有直线 D 和位于 D 同一侧开半平面上的两点 a，b（参见 2.7.3）；则存在唯一的 $x \in D$ 使 $ax + bx$ 极小而且这点 x 的特征就是 $\overrightarrow{ax}$ 和 $\overrightarrow{xb}$ 的平分线位于 D 上．

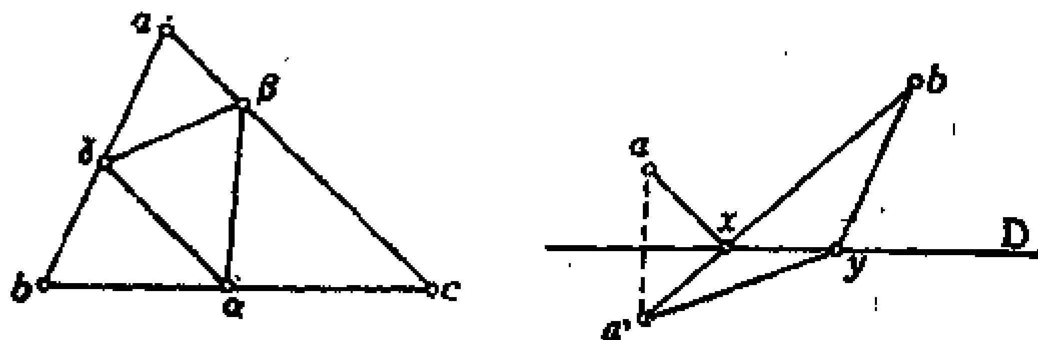


图 9.4.1.1.

经典的办法是引进 $a' = \sigma_D(a)$；于是 $\langle a', b\rangle$ 与 D 交于唯一的一点 x 而且对任一 $y \in D$：$ay + by = a'y + by \geqslant a'b = ax + bx$．

9.4.1.2 附注． $ax + bx$ 极小时必满足平分线的条件，这一点也可由第一变分公式推出：见 9.10.5．

9.4.1.3 命题． 若 $\{a, b, c\}$ 的三角都是锐角（即 $\in]0, \pi/2[$），则该三角形具有唯一的台球轨道，它同时也是唯一的最小周长内接三角形；而且该三角形恰由 $\{a, b, c\}$ 的三个垂足所组成；若 $\{a, b, c\}$ 在 a 处有一个大于或等于 $\pi/2$ 的角，则它不具有任何台球轨道，却具有唯一的内接极小周长三角形，即：α 是自 a 作出

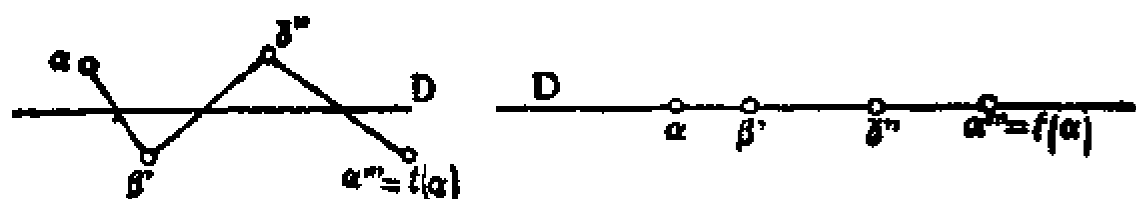


图 9.4.1.3.

的高线的垂足而且 $\beta = \gamma = a$.

9.4.1.4 由紧性可知极小周长多边形总是存在的，因为周长函数

$$[b, c] \times [c, a] \times [a, b] \ni (\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \in \mathbf{R}$$

是连续函数. 假设这一极小值由 $\alpha \in]b, c[$, $\beta \in]c, a[$, $\gamma \in]a, b[$ 所实现，于是由 9.4.1.1 可知 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 是一台球轨道. 将 $\{a, b, c\}$ 的三边记为 $A = \langle b, c\rangle$, $B = \langle c, a\rangle$, $C = \langle a, b\rangle$, 并引

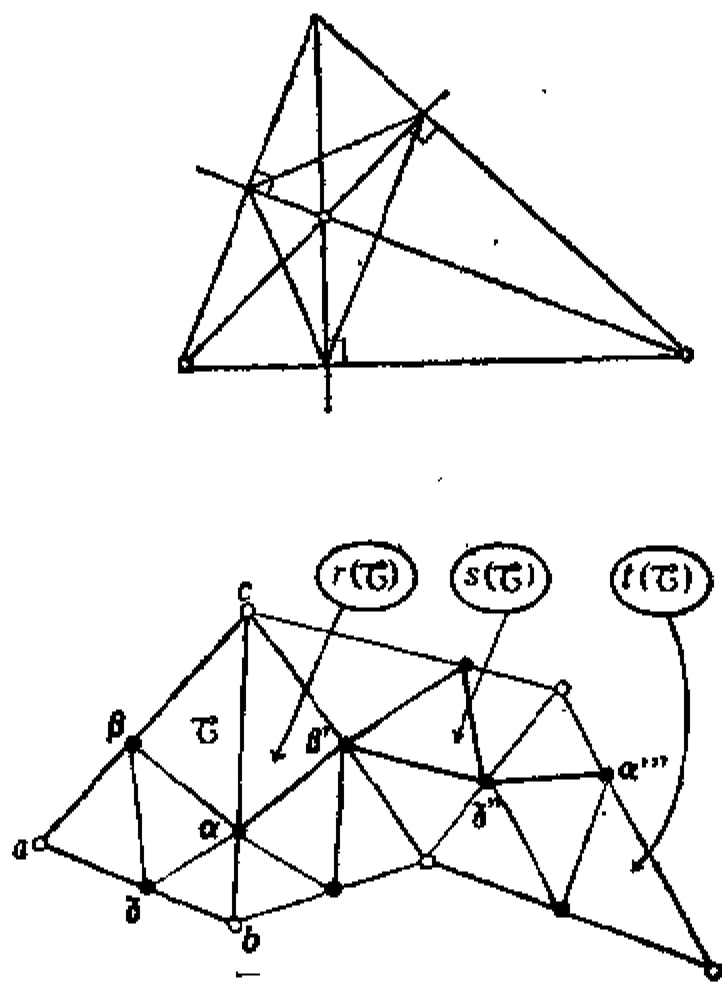


图 9.4.1.4.

进对称 σ_A, σ_B, σ_C；若 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 是台球轨道，则 $f = \sigma_C\sigma_B\sigma_A$ 满足 $f(\langle\alpha, \gamma\rangle) = \langle\alpha, \gamma\rangle$. 但 $f \in \mathrm{Is}^-(X)$，因而(参见 9.3.4) 直线 $\langle\alpha, \gamma\rangle$ 是确定的，它就是 f 的轴；这就说明了台球轨道的唯一性. 而三条高线的垂足又确实给出了 f 的轴(留作习题)，而且这些垂足当且仅当 $\{a, b, c\}$ 的角都是锐角时才严格地位于各边内部. 剩下要说明的是，在钝角三角形的情形，周长的极小值正如命题所述，而在锐角三角形的情形，得出的光线三角形具有极小周长. 在钝角的情形，我们知道，由于极小值可达到(例如在 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$)，所以根据前面的讨论，$\alpha$, β, γ 其中之一必定落在顶点上；于是结论自明. 现在转而证明光线三角形是周长极小的.

我们的方法是将内接三角形 α, β, γ 沿一条折线展开如次；考虑相继如下定义的三个等距：$r = \sigma_A$, $s = \sigma_{B'}\, r$，其中 $B' = r(B)$，$t = \sigma_{C''}s$，其中 $C'' = s(C)$. 我们看到 $\sigma_{B'} = \sigma_{r(B)} = \sigma_A\sigma_B \cdot \sigma_A^{-1} = \sigma_A\sigma_B\sigma_A$，因而 $s = \sigma_A\sigma_B$，同样 $t = \sigma_A\sigma_B\sigma_C$ (于是 $t = f^{-1}$). 对于 $\{a, b, c\}$ 的任何内接三角形 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$，定义 $\beta' = r(\beta)$，$\gamma'' = s(\gamma)$，$\alpha''' = t(\alpha)$；于是由三角形不等式有

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \alpha\beta' + \beta'\gamma'' + \gamma''\alpha''' \geqslant \alpha t(\alpha).$$

然后应用 9.3.2：函数 $x \longmapsto xt(x)$ 恰在 t 的轴 D 上取到极小值，而 t 的轴也就是 f 的轴. 另一方面，若 α 位于该轴上(也在 $[a, b]$ 上)，则容易看出，在该轴上共线的 α, β', γ'', α''' 是相继排列的，因此 $\alpha\beta' + \beta'\gamma'' + \gamma''\alpha''' = \alpha t(\alpha)$.

9.4.2 任意多边形. 在本段中 P 是凸 n 边形(参见 12.1)，顶点记为 $(a_i)_{i=1,\cdots,n}$，位于直线 $\langle a_i, a_{i+1}\rangle$ 上的边 $[a_i, a_{i+1}]$ 记为 D_i；还常用到 $n + 1 = 1$ 的记号. 先将 9.4.1 中的概念作一推广：所谓 P 的内接多边形就是给定 $(\alpha_i)_{i=1,\cdots,n}$ 使 $\alpha_i \in [a_i, a_{i+1}]$ $\forall i = 1, \cdots, n$；内接多边形 $(\alpha_i)_{i=1,\cdots,n}$ 称为光线多边形，如果 $\alpha_i \in]a_i, a_{i+1}[$ 且 $\sigma_{D_i}(\langle\alpha_i, \alpha_{i-1}\rangle) = \langle\alpha_i, \alpha_{i+1}\rangle$ $\forall i = 1, \cdots, n$. (α_i) 的周长是

$$p((\alpha_i)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\alpha_{i+1}.$$

9.4.2.1 定理. 必然存在周长极小的内接多边形；若该极小值是 k，(α_i) 是严格内接多边形而且 $p((\alpha_i))=k$，则 (α_i) 是光线多边形. 反之，每一光线多边形必是周长极小的.

假设存在一个光线多边形，则：若 n 是奇数，则它是唯一的，若 n 是偶数，则存在无穷多个光线多边形。

为使 $n=2p$ 时存在一个光线多边形，必须在直线定向角集合 $\mathfrak{A}(\vec{X})$ 中成立关系式 $\sum_{i=1}^{n}\widehat{D_{2i-1}D_{2i}}=0$，特别当 $n=4$ 时顶点 (a_i) 必须是共圆的. 对任意的 n，为使存在一个光线多边形，只须存在一条直线 D 使 $f(D)=D$ 且 $D\cap g_i(]a_{i+1},a_{i+2}[)\neq\varnothing\ \forall i=1,\cdots,n$（其中 f 和 g_i 定义如下）。

这一命题的证明没有什么新的东西，想法完全跟 9.4.1.3 的证明相似.

9.4.2.2 根据紧性，极小周长多边形是存在的，同样，由 9.4.1.1 可知极小周长的严格内接多边形一定是光线多边形. 反过来的证明不那么容易，它是定理最后一部分的推论.

9.4.2.3 将 9.4.1.4 中的作法推广如下. 令 $f=\sigma_{D_n}\cdots\sigma_{D_1}$；再用递推法定义 g_i：

9.4.2.4 $g_1=\sigma_{D_1}$，$g_2=\sigma_{g_1(D_2)}g_1\cdots g_{i+1}=\sigma_{g_i(D_{i+1})}g_i$ $(i=1,\cdots,n)$. 由于 $\sigma_{h(C)}=h\sigma_Ch^{-1}$，我们看到

9.4.2.5 $\forall i: g_i=\sigma_{D_1}\cdots\sigma_{D_i}$，特别有 $g=g_n=\sigma_{D_1}\cdots\sigma_{D_n}=f^{-1}$. 对内接多边形 (α_i)，用递推法定义 β_i 如下：

9.4.2.6 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=g_1(\alpha_2)$，$\cdots$，$\beta_{i+1}=g_i(\alpha_{i+1})$ $(i=1,\cdots,n)$.

并集 $\bigcup_{i=1}^{n}[\beta_i,\beta_{i+1}]$ 是表示内接多边形 (α_i) 的"展开"的一条"折线"，确切地说，在这种展开下，这条折线成为线段的充要条件是 (α_i) 是光线多边形.

由上述做法可知 $p((\alpha_i))=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\beta_{i+1}$；根据严格三角形不

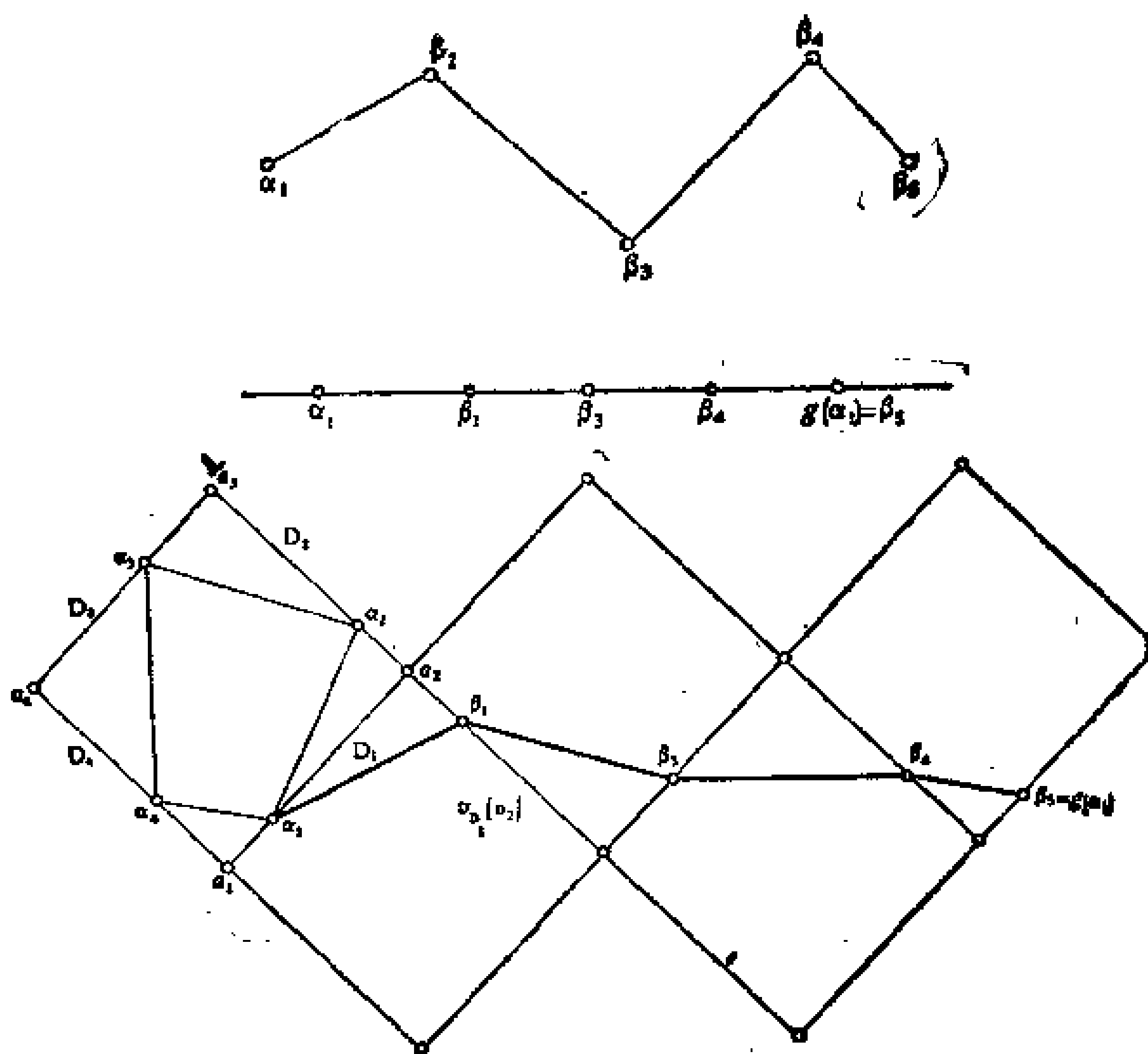


图 9.4.2.6.

等式还有：

9.4.2.7 $\begin{cases} p((\alpha_i)) \geqslant \alpha_1 g(\alpha_1) \text{ 且 } p((\alpha_1)) = \alpha_1 g(\alpha_1) \text{ 的充要条件} \\ \text{是 } \beta_i \text{ 依次位于同一直线上.} \end{cases}$

9.4.2.8 假设 (α_i) 是光线多边形，则直线 $D = \langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle$ 在 f 下稳定：$f(D) = D$. 因此若 n 是奇数，则 $f \in \mathrm{Is}^-(X)$ 且 D 是 f 的唯一的轴（参见 9.3.4），因此在奇数情形下光线多边形是唯一的. 在偶数边形的情形下不唯一的结论，则可由证明的末尾推出. 假定 (α_i) 是 $n = 2p$ 为偶数时的光线多边形，则有 $f(D) = D$，但由 9.3.4 可知这时必须有 $f \in T(X)$，这等价于在 $\tilde{\mathfrak{A}}(\vec{X})$ 中 $\Phi^{-1}(f) = 0$. 把 f 中的对称归类成：

$$f = (\sigma_{D_{2p}} \sigma_{D_{2p-1}}) \cdots (\sigma_{D_2} \sigma_{D_1}),$$

并应用 8.7.7.8：即得 $\sum_{i=1}^{p} \widehat{D_{2i-1}D_i} = 0$. 至于 $n = 4$ 时共圆的结论，可由 10.9.5 推出。

9.4.2.9 现假设定理末尾的条件都已满足。

由 (a_i) 的凸性可推出，点 $\beta_i = D \cap g_i(]a_{i+1}, a_{i+2}[)$ 依次位于 D 上，因此(参见 9.4.2.7) 由 $\alpha_i = g_{i-1}^{-1}(\beta_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ 定义的内接多边形 (α_i) 的周长 $p((\alpha_i))$ 等于 $p((\alpha_i)) = \beta_1 g(\beta_1)$. 若反过来从任一内接多边形出发，仍由 9.4.2.7 可知其周长为

$$p((\alpha_i')) = \alpha_1' g(\alpha_1');$$

但 9.3.2 和 9.3.4 表明 $p((\alpha_i')) \geqslant p((\alpha_i))$，或是 f 属于 $\mathrm{Is}^-(\mathscr{X})$ (n 为奇数)且有唯一的轴，或是 f 属于 $T(X)$ (n 为偶数) 且以所有与平移方向平行的直线作为整体不变直线，因此多边形 (α_i) 有极小周长(而且是光线多边形)。这也表明了，每一光线多边形都是周

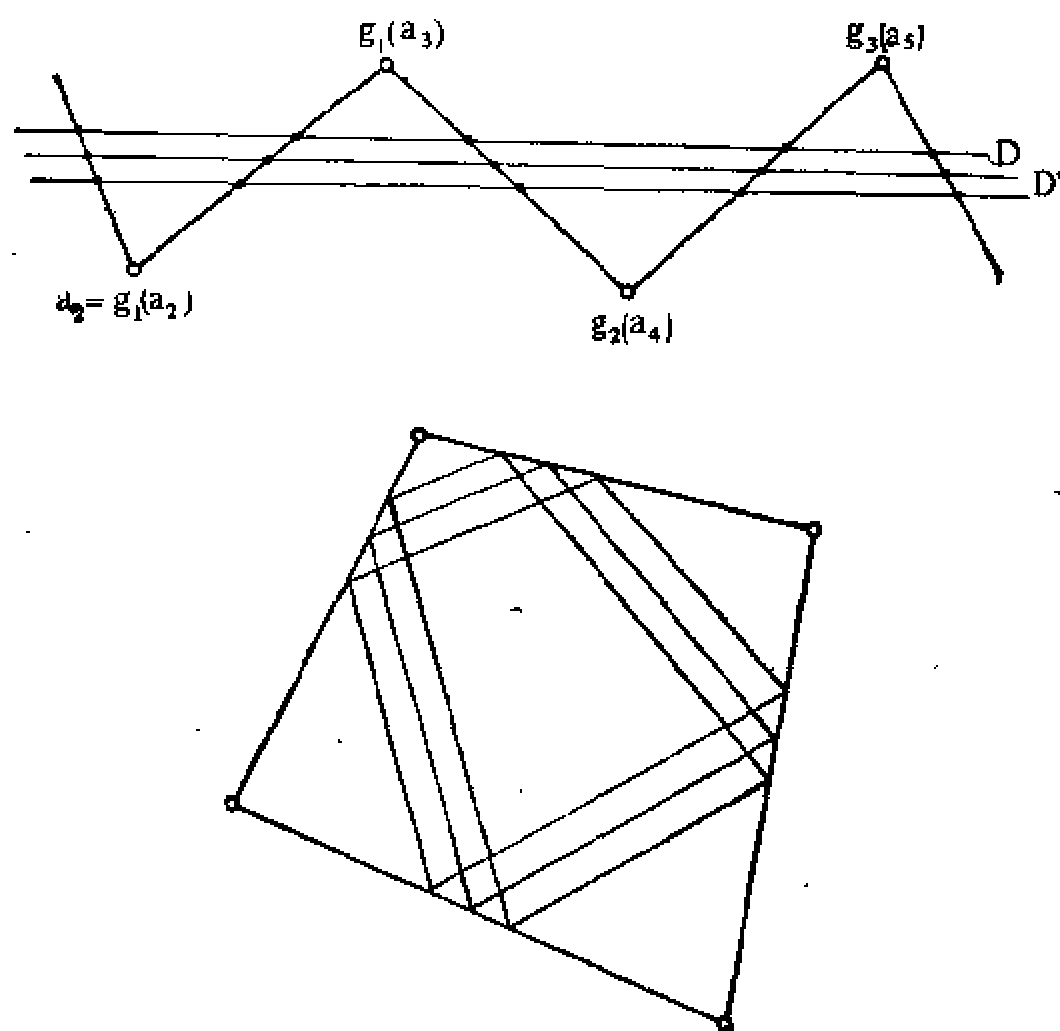


图 9.4.2.9.

长极小的，因为根据 g_i 的定义，直线 $D=\langle\alpha_1, \alpha_n\rangle$ 是满足我们的假设条件的。

9.4.2.10 最后，若 n 是偶数而 (α_i) 是光线多边形，则直线 $D=\langle\alpha_1, \alpha_n\rangle$ 满足关于 $g_i(]a_{i+1}, a_{i+2}[)$ 的交的假设条件；由连续性，每一充分靠近 D 且平行于 D 的直线 D' 仍满足这一条件，且由 $f\in T(x)$ 还有 $f(D')=D'$.

9.4.3 **注.** 对任何 n 都会产生与三角形情形相仿的不如人意的现象：一般说来并不存在光线多边形，见 9.14.10.

若想实际找出周长的极小值 k，可以这样做：首先通过具体构作 f 找出光线多边形，然后应用 9.4.2.1. 若无法找到光线多边形，则必定有某个 α_i 是 P 的一个顶点；于是可以胸有成竹地考察各种特殊情形并有条不紊地应用 9.4.1.1.

可以研究凸多边形中的台球轨道，它们在来回若干次以后即封闭，见 9.14.9.

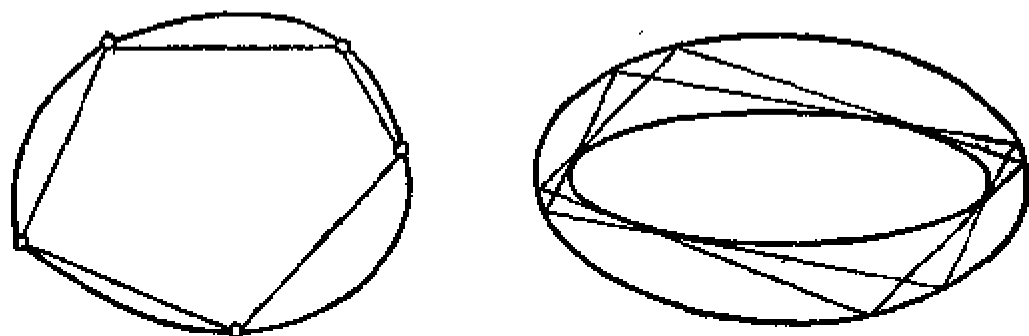


图 9.4.3.

也可在平面紧凸形（不一定是多边形）中研究光线多边形. 当这凸形是严格凸时（参见 11.6.4），情形最为有趣：对任何 $\geqslant 2$ 的整数 n，总存在具有 n 个顶点的光线多边形，证明可看 9.14.33，椭圆的情形是很引人入胜的：我们在 17.6.6 将会看到，不仅对任何 n 都存在光线多边形，而且它们总有无穷多个，更确切地说，可取椭圆上任意一点作为这种多边形的一个顶点（对任意 n 都如此）.

9.4.4 **遍历性.** 一个至今尚在研究之中而没有得到完全解决的问题，就是任意一个多边形或紧凸形的光线轨道（或台球轨道，两者是一回事）的遍历性问题. 一条轨道由一个起始点和一个直线方

向所决定，先射到边界，再根据等角条件反射出去，然后如此往返．我们感兴趣的是所有轨道的集合，或者说是与之至多相差零测度的一个集合，凡是射到一个顶点而反射方向不明的轨道都不计在内．如果几乎所有的轨道在凸形中处处稠密，则称该凸形是弱遍

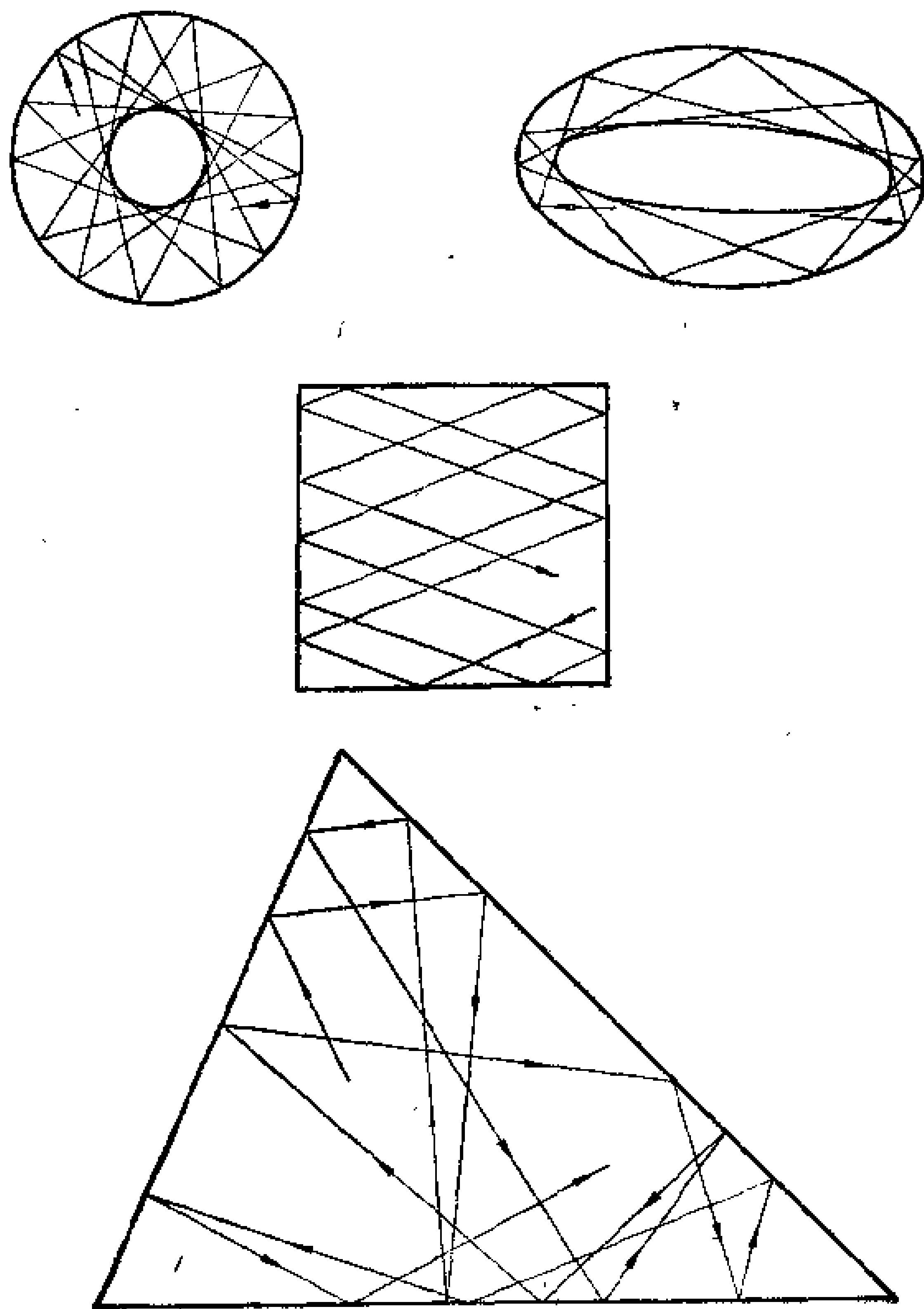


图 9.4.4.

历的，如果几乎所有的轨道在凸形内所有方向所成的空间中处处稠密，则称该凸形是强遍历的．所以，我们所感兴趣的是与 9.4.2 所讨论的寻找封闭轨道问题相对的一个问题．有几种凸形可供研究：圆和椭圆都不是弱遍历的，圆的情形是显然的，椭圆的情形则可由 17.6.6 推出．9.14.11 中指出有些三角形不是强遍历的．正方形必定是弱遍历的（因为所有斜率为无理数的方向提供了处处稠密的轨道），但又必定不是强遍历的，因为轨道只有两个互为相反数的斜率．可是遍历性的问题，哪怕是在已知内角的三角形中，还是在作了大量研究以后至今仍然远未解决的一个问题；为了体会一下这一问题的复杂性，只要沿一条轨道试画出几次反射，这时你很快就会有一种如堕五里雾中的感觉．有关遍历性的新近的文献，可阅：[A-A]，[CZ]．最近 Lazutkin 刚证明了，具有 C^2 类边界的严格凸形必然不是遍历的；这是由它们具有焦散面引出的结论，也是在给定椭圆内的共焦椭圆的推广，对此可阅 [LZ]．

9.5 相　似

设 $f\in GA(X)$ 使 $\vec{f}\in GO(\vec{X})$（参见 8.8.2）；若 μ 是 $\vec{f}$ 的相似比，则有

$$f(x)f(y)=\mu xy,\quad f(x')f(y')=\mu x'y',$$

由此即得：$x\neq y$ 时总有 $\dfrac{f(x')f(y')}{f(x)f(y)}=\dfrac{x'y'}{xy}$；换句话说，这样的 f "保持距离之比"．其逆也真．

9.5.1 命题． 设 $f: X\circlearrowleft$ 是集论意义下的非常值映射并使 $x\neq y$ 且 $f(x)\neq f(y)$ 时总有 $\dfrac{f(x')f(y')}{f(x)f(y)}=\dfrac{x'y'}{xy}$，则这一条件等价于 $f\in GA(X)$ 和 $\vec{f}\in GO(\vec{X})$．这样的 f 称为 X 中的相似；若还有 $\vec{f}\in GO^+(\vec{X})$（相应地，$GO^-(\vec{X})$），则称为正向（相应地，逆向）相似；相应的集合分别记为 $\mathrm{Sim}(X)$，$\mathrm{Sim}^+(X)$，$\mathrm{Sim}^-(X)$．f 的相似比就是 $\vec{f}$ 的相似比．

由于 f 是非常值映射，所以存在 $x_0\neq y_0$ 使 $f(x_0)\neq f(y_0)$．

于是由假设条件可推知 f 是双射而且对所有的 x, $y\in X$ 有 $f(x)f(y)=\mu xy$, 其中 $\mu=\dfrac{f(x_0)f(y_0)}{x_0y_0}$. 但这样 $h\circ f$ 就是 X 中的等距,这里 h 是任何以 μ^{-1} 为比的位似;根据 9.1.3 就有 $h\circ f\in GA(X)$ 和 $\overrightarrow{h\circ f}\in O(\vec{X})$; 由此,合成 h^{-1} 后就得出关于 f 的结论.

9.5.2 命题. 设 $f\in \mathrm{Sim}\ (X)\backslash \mathrm{Is}\ (X)$; 则存在唯一的 $\omega\in X$ 使 $f(\omega)=\omega$, 这个 ω 称为相似 f 的中心. 而且还有

$$f=h\circ g=g\circ h,\ \text{其中}\ h\in H_{\omega,\mu},\ g\in \mathrm{Is}_{\omega}(X).$$

这个命题可由 9.3.3 推出. 另一种证明则要用到拓扑,更确切地说是用到压缩映射的理论;事实上若 μ 是 f 的相似比,则 $\mu<1$ 时 f 是压缩,而 $\mu>1$ 时 f^{-1} 才是压缩!

9.5.3 相似的特征

9.5.3.1 设 f 是一个相似;由 9.2.1 和 8.8.5.1 可知 f 保持直线、半直线的交角, 而且在平面的情形 f 保持定向角或使之反向, 视 f 是正向还是逆向而定. 尤其, f 保持直线的正交性:

$$D\perp D'\Rightarrow f(D)\perp f(D').$$

同样,对 X 中的任一球面 S (需要时可参看 10.7), $f(S)$ 仍是球面 (半径乘以 μ). 前面这些性质确是相似的特征:

9.5.3.2 定理. 对集论意义下的双射 $f: X\circlearrowleft$, 这里 $\dim X\geqslant 2$, 下面的三个条件是等价的:

(i) f 是相似;

(ii) 对 X 中任何满足 $a\neq b$, $c\neq d$ 和 $\langle a,b\rangle\perp\langle c,d\rangle$ 的四点 a,b,c,d, 有 $\langle f(a),f(b)\rangle\perp\langle f(c),f(d)\rangle$;

(iii) 对 X 中任一球面 S, $f(S)$ 仍是球面.

9.5.3.3 先假定 (ii) 成立. 考虑到 2.6.5 和 8.8.5.1, 只须证明 f 将共线三点 a,b,c 变成共线的三点 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$. 为此, 将 a, b 扩充成一个仿射正交标架 $\{a,b,a_2,\cdots,a_n\}$; 根据假设条件及 8.1.2.5, $\{f(a),f(b),f(a_2),\cdots,f(a_n)\}$ 也是一个正交标架. 但 $\langle f(a),f(c)\rangle\perp\langle f(a),f(a_i)\rangle$ $\forall i=2,\cdots,n$, 由此即得

$$\langle f(a),f(b)\rangle=\langle f(a),f(c)\rangle.$$

9.5.3.4 现在假定 (iii) 成立，我们先来证明 f 将共线点变成共线点. 其逆是容易证明的：若 a', b', c' 是共线的相异三点，则 $a=f^{-1}(a')$, $b=f^{-1}(b')$, $c=f^{-1}(c')$ 共线，因为否则将存在一

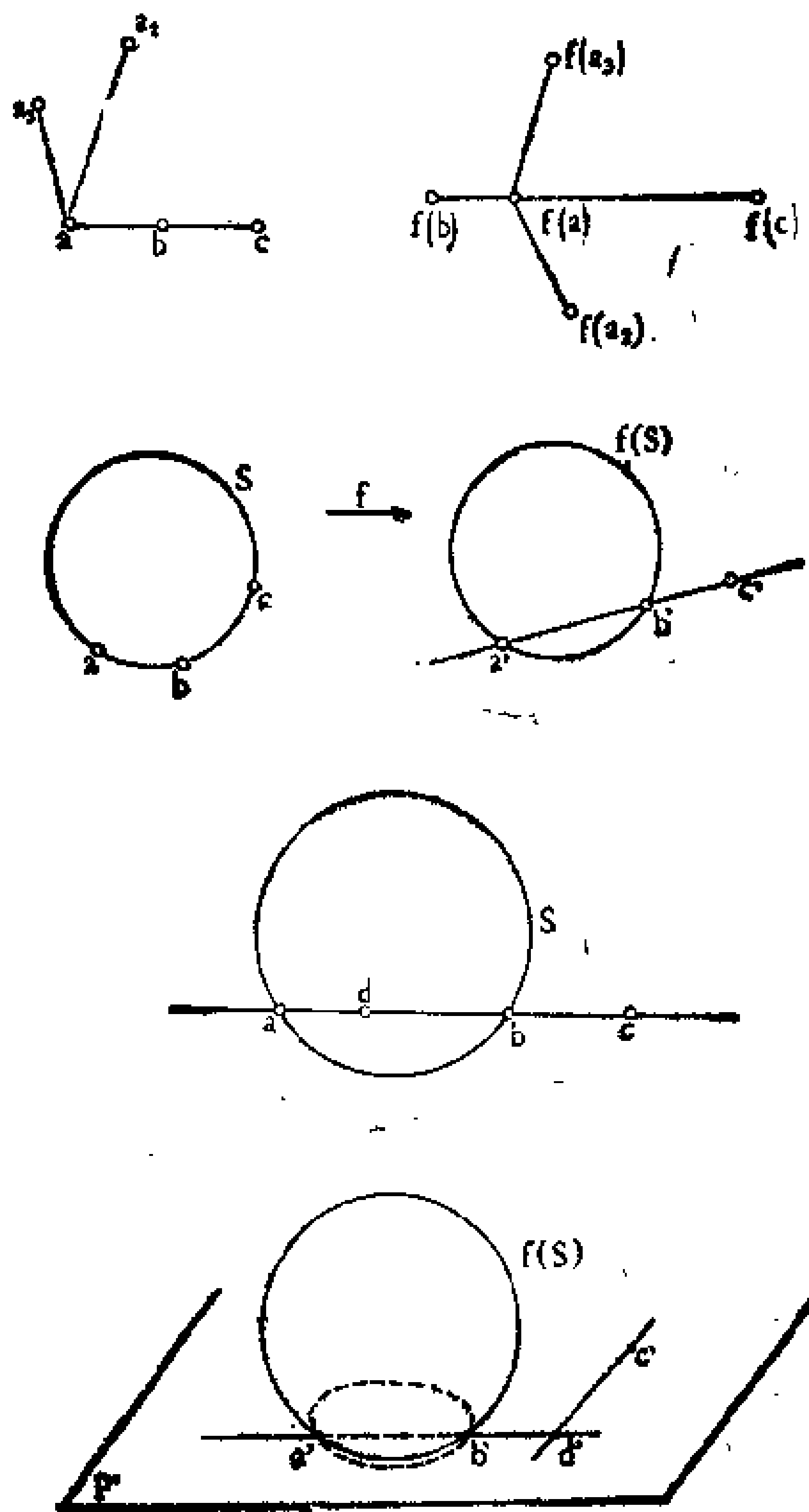


图 9.5.3.4.

个含 a, b, c 的球面 S，而且 a', b', c' 将是球面 $f(S)$ 上共线的相异三点，这是不可能的(需要时可参看 10.7.2)。现在假设 a, b, c 是共线相异三点，$a'=f(a)$，$b'=f(b)$，$c'=f(c)$；倘使 $c'\notin\langle a', b'\rangle$，我们要推出矛盾。由前所述 $f^{-1}(\langle a', b'\rangle)\subset\langle a, b\rangle$，但 $f^{-1}(P'=\langle a', b', c'\rangle)\subset\langle a, b\rangle$，这只要在 $\langle a', b'\rangle$ 上任取 d' 即可看出：$f^{-1}(\langle c', d'\rangle)\subset\langle a, c\rangle=\langle a, b\rangle$。于是，设 S 是过 a, b 的球面，就有 $S\cap\langle a, b\rangle=\{a, b\}$；因而 $f(S)\cap P'=C'$ 是 P' 上的一个圆且应有 $f^{-1}(C')\subset\langle a, b\rangle$，推出矛盾，因为一个圆至少含有三个相异的点。

9.5.3.5 由 2.6.5 可知，剩下的事是证明 $f\in GA(X)$ 若将球面都变成球面则必是相似；其实只须说明 f 将一个球面变成一个球面就可以了。必要时只要将 f 合成上一个扩张，就不妨假定存在一个球面 S 使 $f(S)=S$。首先注意到 f 使 S 的中心 ω 不动；为此，设 a, b 是 S 上对径的两点，于是一方面，S 在 a, b 处的切超平面 H_a，H_b 必然是平行的，另一方面，球面的切超平面与该球面仅交于一点。由这两个特征可推出 $f(H_a)$，$f(H_b)$ 就是 S 在 $f(a)$ 和 $f(b)$ 处的两个切超平面，它们互相平行，因此 $f(a)$，$f(b)$ 是 S 上的对径点。但这样就有

$$\omega=\frac{f(a)+f(b)}{2}=f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(\omega),$$

因为 f 是仿射变换。

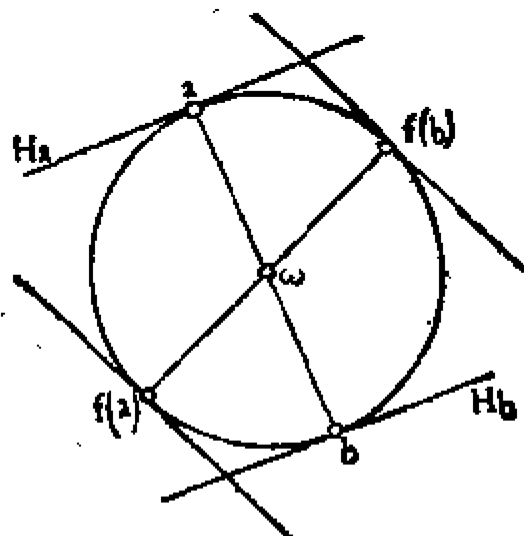


图 9.5.3.5.

所以现在可以归结到向量空间的情形了：$f\in GL(X_\omega)$；但 $f(S)=S$ 等价于 f 保持 X_ω 的范数，因此由 8.1.5 可得 $f\in O(X_\omega)$.

9.5.3.6 附注. 若将 9.5.3.2 中的条件降低为仅假设 f 是 X 的两个子集之间的一个双射，则由条件 (iii) 不一定能推出 f 是一个相似的限制. 例如 f 可以是一个反演，参见 10.8.2，或者是反演的合成，参见 18.10.4. 有关作为仿射空间子集间的双射并保持球面的 f 的讨论，可参阅 [CD] 和 [GI-WE].

9.5.4 Liouville 定理

9.5.4.1 本段要讨论相似性的一个与微分几何有关的特征；但其中内容与本书下述章节也有密切联系：10.8.5，18.10，20.6.

从 X 中一个相似 f 出发，将它看作 C^∞ 映射 $X\to X$；对每一态射 $f\in A(X;X)$，f 总是 C^∞ 的，而且其导数 $f':X\to L(X;X)$ 就是常值映射 $x\longmapsto\vec{f}$，即 $f'(x)=\vec{f}\ \forall x\in X$（这可由 2.7.7 推出）. 因此，在我们的特殊情形下，$f\in \mathrm{Sim}(X)$ 是一个 C^1 映射且使 $f'(x)=\vec{f}\in O(\vec{X})\ \forall x\in X$；因此可以说相似 f 是"无穷小保角"的. 我们自然要问，除了相似之外是否还有其它映射也有这种性质呢? 当然 $n=1$ 时任何有非零导数的映射都有这种性质；因此我们下面不再考虑 $n=1$ 的情形.

9.5.4.2 定义. 设 U 和 V 是欧氏仿射空间 X 的两个开子集，$f\in C^1(U;V)$（即 $f:U\to V$ 是 C^1 的）. f 称为**保角映射**，如果 f 是双射且 $f'(x)\in GO(\vec{X})\ \ \forall x\in U$；若还有 $f'(x)\in GO^+(\vec{X})$ 或 $GO^-(\vec{X})$，则分别称为**正向**或**反向**保角映射. 相应的集合分别记为 $\mathrm{Conf}(U,V)$，$\mathrm{Conf}^+(U;V)$，$\mathrm{Conf}^-(U,V)$；并记 $\mathrm{Conf}(U)=\mathrm{Conf}(U;U)$，$\mathrm{Conf}^\pm(U)=\mathrm{Conf}^\pm(U;U)$.

单射的条件，$GO(\vec{X})\subset\mathrm{Isom}(\vec{X};\vec{X})$ 的事实，再加上局部微分同胚定理，表明了 $f\in\mathrm{Conf}(U;V)$ 必是 U 到 $f(U)$ 上的一个微分同胚.

9.5.4.3 第一个例：全纯函数

假设 $n=\dim X=2$，由 8.3.12 和 9.6.4 可知，全纯函数 $U\to X$ 的概念是有意义的；其实，**预先**应该将 X 定向，但实质上得

出的结论与所取定向是无关的. 于是 $f: U \to X$ 是单射的全纯函数且导数处处不为零，就等价于 $f \in \mathrm{Conf}^+(U; f(U))$. 这是一个经典的结果，可由 8.8.4.1 推出(需要时可参看 [CH2] 第 67 页).

这样就提供了大量并非真正相似的所谓无穷小相似，因为定义在开集 U(比如说 $\mathbf{C}$ 中的) 单射、全纯且有处处不为零导数的映射可有大量的选择余地. 而且从一种很合理的意义上说，这种选择的可能性甚至不是有限维的.

9.5.4.4 第二个例：反演

在 10.8.5 中可以看到，以 a 为中心的任意次幂的反演，总是属于 $\mathrm{Conf}(X \setminus a)$ 的；这样，有限多个反演的合成就提供了 $\mathrm{Conf}(U; f(U))$ 中元素的例子，这里 U 是 X 中除去有限多个点后余下的子集，上述元素并不是真正的相似.

9.5.4.5 但这些反射的选择可能性是有限维的，在 18.10.4 中可以看到，这一维数是 $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

下面的定理表明，对无穷小相似来说，$n=2$ 的情形与 $n \geqslant 3$ 的情形是有本质的差别的；这个定理也表明，"局部"的 (即在 X 的一个开子集 U 上)讨论与"整体"的 (即 U 是整个 X) 讨论是有本质的差别的. 关于"从局部到整体"的过渡，可在 12.8, 16.4, 18.3.8.6 中见到其它的例子.

9.5.4.6 定理. 若 $n=2$，则 $\mathrm{Conf}(X) = \mathrm{Sim}(X)$；若 n 任意，$f \in \mathrm{Conf}(X)$ 且 f 是 C^1 的，则 $f \in \mathrm{Sim}(X)$. 设 $n \geqslant 3$，U 是 X 的任一开子集，$f \in \mathrm{Conf}(U; f(U))$ 是 C^1 的，则 f 是 X 上反演之积在 U 上的限制(因此是 C^∞ 的).

9.5.4.7 附注. 我们总有 $\mathrm{Conf}(X) = \mathrm{Sim}(X)$，即 f 为 C^1 映射已够，但对 $n \geqslant 3$ 的情形，证明远要困难得多，必须用到很深入的分析技巧，参见 [HM]. 以下在 $n \geqslant 3$ 情形下的 9.5.4.6 的证明方法是 R. Nevanlinna 给出的：[NA]；参见 9.5.4.21. 也可参阅 [LF3] 第 59 页练习 12.

9.5.4.8 $n=2$ 的情形. 将 X 向量化，并通过定向把它等同

于 $\mathbf{C}$，考虑 C^1 单射 f: $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$. 由于 $\mathbf{C}$ 连通，就有

$$f'(z)\in GO^+(\mathbf{C})\quad \forall z\in\mathbf{C}, \text{或 } f'(z)\in GO^-(\mathbf{C})\quad \forall z\in\mathbf{C},$$

必要时只要将 f 乘以共轭映射 $z\longmapsto\bar{z}$，就不妨假定总是前一种情形成立. 由 9.5.4.3 可知映射 f: $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 是单射全纯函数；而由经典的结论即知 f 必定形如 $z\longmapsto az+b$（对适当的 $a, b\in\mathbf{C}$），因此 f 是相似（需要时可参阅 9.6.4）. 对最后一点，建议读者参阅 [CH2] 第 181—182 页；其证明相当有趣，用到了本质奇点和亚纯函数的概念.

$n\geqslant 3$ 情形的证明，特别用到了下述有名的

9.5.4.9 编辫引理. 设 V, W 是特征数 $\neq 2$ 的域上的两个向量空间，k: $V\times V\times V\to W$ 是一个三重线性映射，关于前两个变量对称而关于后两个变量反对称. 则必有 $k=0$.

这个引理有时在微分几何中起关键的作用，本处即是一例，此外可参阅例如 [SB] 第 333 页和 [KO-NO1] 第 160 页. 引理之所以取这样的名称，是由于它的证明恰好类似于编一条辫子的开头六个动作：做完第六个动作，又回到了起始的情况. 但在三个位置上两股绳的交叉点在左边，在三个位置上两股绳的交叉点在右边，因此有三个负号，由此得证.

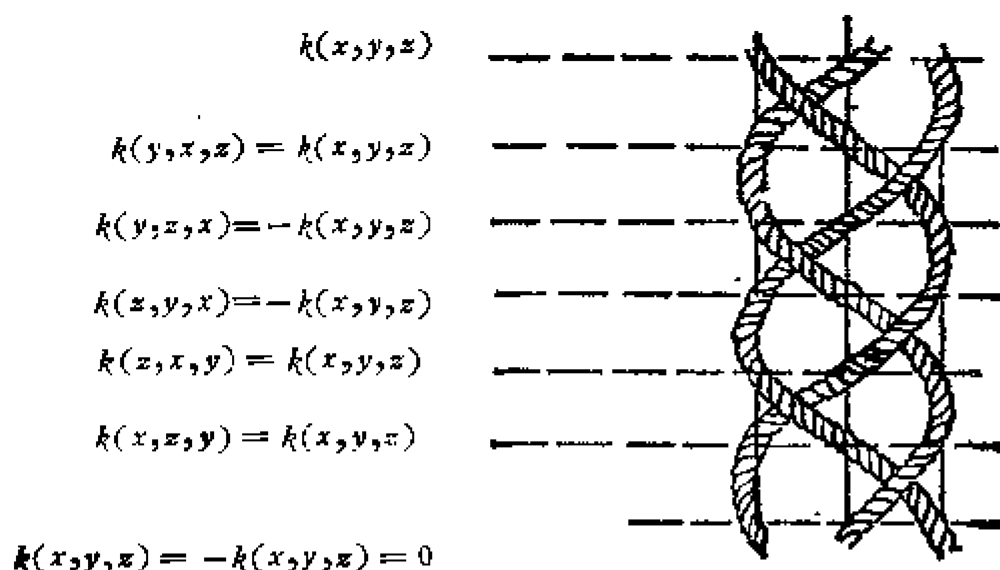


图 9.5.4.9.

9.5.4.9（续）"三重线性"的性质并非必要的，参见 1.9.15 体

会引理证明的实质.

9.5.4.10 由假设条件 $f'(x)\in \mathrm{GO}(\vec{X})\ \forall x\in U$，因此，若把相应的相似比记为 $\mu(x)$，则有

9.5.4.11 $(f'(x)(u)|f'(x)(v))=\mu^2(x)(u|v)\ \forall u,v\in\vec{X}$.

设 u, v 是固定的正交向量，则有

$$(f'(x)(u)|f'(x)(v))=0\quad \forall x\in U,\ \text{微分即得}$$

$$(f''(x)(u,w)|f'(x)(v))+(f'(x)(u)|f''(x)(v,w))=0$$
$$\forall w\in\vec{X}.$$

编辫引理和关于 f'' 的对称的 Schwarz 定理表明，当 u, v, w 是 $\vec{X}$ 中正交向量组时，有 $(f''(x)(u,v)|f'(x)(w))=0$. 由于 $f'(x)(u)$, $f'(x)(v)$, $f'(x)(w)$ 相互正交，对生成平面 $\mathbf{R}u+\mathbf{R}v$ 的正交补的所有的 w 施行上述做法后，就可看出 $f''(x)(u,v)\in \mathbf{R}f'(x)u+\mathbf{R}f'(x)v$，因此存在两个函数 $\alpha,\beta:U\to\mathbf{R}$，使

9.5.4.12 $\begin{cases} f''(x)(u,v)=\alpha(x)f'(x)(u)+\beta(x)f'(x)(v) \\ \forall x\in U,\ \forall\ \text{固定正交的}\ u,\ v. \end{cases}$

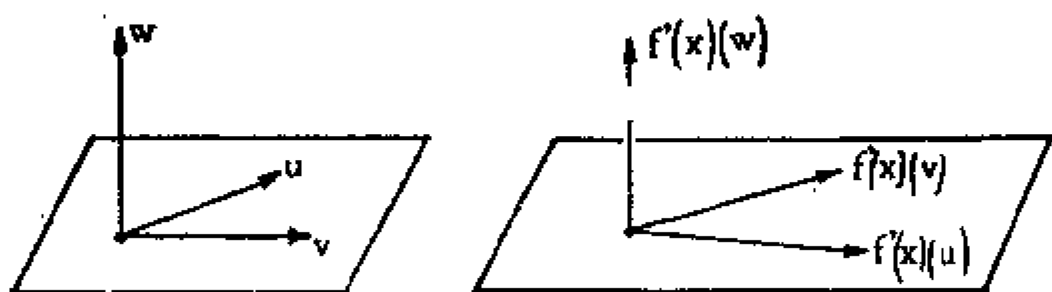


图 9.5.4.12.

微分 $\|f'(x)(u)\|^2=\mu^2(x)\|u\|^2$，就有

$$(f''(x)(u,v)|f'(x)(u))=\mu'(x)(v)\mu(x)\|u\|^2,$$

因此，代入 9.5.4.12 即得

9.5.4.13 $\alpha(x)=\dfrac{\mu'(x)(v)}{\mu(x)},\quad \beta(x)=\dfrac{\mu'(x)(u)}{\mu(x)};$

再将 9.5.4.13 代回 9.5.4.12，并令 $\rho=\mu^{-1}$，得

9.5.4.14 $\begin{cases} \rho'(x)(v)f'(x)(u)+\rho'(x)(u)f'(x)(v) \\ \qquad +\rho(x)f''(x)(u,v)=0 \\ \forall x\in U,\ \forall\ \text{固定正交的}\ u,\ v. \end{cases}$

9.5.4.15 我们一鼓作气，作出 f 的三阶微分。微分 9.5.4.14 即得

$$\rho''(x)(v,w)f'(x)(u)+\rho'(x)(v)f''(x)(u,w)$$
$$+\rho''(x)(u,w)f'(x)(v)+\rho'(x)(u)f''(x)(v,w)$$
$$+\rho'(x)(w)f''(x)(u,v)+\rho(x)f'''(x)(u,v,w)=0;$$

可以看出，后五项之和是关于 u, w 对称的，因而第一项也应如此：

$$\rho''(x)(v,w)f'(x)(u)=\rho''(x)(v,u)f'(x)(w),$$

上式对任何正交组 u, v, w 都成立（函数 ρ 本身与 u, v 无关!）。但向量 $f'(x)(u)$ 与 $f'(x)(w)$ 线性无关，因此，由 $n\geqslant 3$ 可知对任何正交的 u, v, 都有 $\rho''(x)(u,v)=0$。

根据与 8.8.5.1 类似的证明（这里无穷小相似与真正的相似一致了!）可知 $\rho''(x)$ 与欧氏度量成比例，因此存在 $\sigma: U\to\mathbf{R}$ 使

9.5.4.16 $\rho''(x)(u,v)=\sigma(x)(u|v)\ \forall x\in U\ \forall u,v\in\vec{X}$。其实 σ 是常数；为了说明这一点，将 9.5.4.16 微分（这是可行的，因为 f 是 C^4 的）：$\rho'''(x)(u,v,w)=\sigma'(x)(w)(u|v)$，由 ρ''' 对称可知右端项也关于 v, w 对称。因此有：$(\sigma'(x)(w)v-\sigma'(x)(v)w|u)=0$, $\forall u$, 即 $\sigma'(x)(w)v=\sigma'(x)(v)w$，由此推得 $\sigma'=0$，因为 v, w 是线性无关的。

9.5.4.17 方程 $\rho''(x)(u,v)=\sigma(u|v)$（$\sigma$ 为常数）容易积分解出：

9.5.4.18 $\rho(x)=a\|\overrightarrow{x_0x}\|^2+b$, a, b 为常数，$x_0\in X$。

若 $a=0$，则 μ 为常数，微分 9.5.4.11 即得 $f''=0$，因此 f 是仿射映射，从而是限制在 U 上的一个相似。若 $b=0$，注意到 $x_0\notin U$，而且将 f 与一个以 x_0 为极点的反演 i 复合后，所得映射 $i\circ f$ 仍是一个无穷小相似；而当合成这样的无穷小相似时，9.5.4.18 中的 ρ 因子满足 $\rho_{f\circ g}(x)=\rho_f(g(x))\rho_g(x)$。然而一个以 x_0 为极点的反演的 ρ 因子是 $\|\overrightarrow{x_0x}\|^2$（参见 10.8.5.1），因此 $i\circ f$ 的 ρ 因子是常数，$i\circ f$ 是一个限制在 U 上的真正的相似，对这种情形定理已得证。现在要证明必有 $ab=0$。注意到当 f 是 C^4 类且 $n\geqslant 3$ 时，

若 $U = X$，则 $f \in \mathrm{Sim}(X)$；事实上 $b = 0$ 的情形是可以排除的，既然 $\rho(x) \neq 0\ \forall x \in U = X$.

9.5.4.19 设 g 是 $f: U \to f(U)$ 的逆微分同胚，则它应是无穷小相似，根据 9.5.4.17 给出的相似比合成公式，就有 $\mu_{g\circ f} = 1 = \mu_g(f(x))\mu_f(x) = 1\ \forall x \in U$. 因此，由 9.5.4.18 可知存在常数 c, d 使

9.5.4.20 $(a\|\overrightarrow{x_0x}\|^2 + b)(c\|\overrightarrow{f(x_0)f(x)}\|^2 + d) = 1\quad \forall x \in U$.

这说明，首先，f 将包含在 U 内的以 x_0 为中心的球面部分变换成以 $f(x_0)$ 为中心的球面部分；其次，f 将 U 中支撑线经过 x_0 的一个线段变换成 $f(U)$ 中支撑线经过 $f(x_0)$ 的一个线段. 若固定 $u \in \vec{X}$ 使 $\|u\| = 1$，则得到一个由下列等式定义的数值函数 φ：

$$f(x_0 + tu) = f(x_0) + \varphi(t)v,$$

其中 v 是单位向量，t 的变化区间适当选定. 根据 9.5.4.11，有 $\varphi'(t) = (at^2 + b)^{-1}$ 和 $(at^2 + b)(c\varphi^2(t) + d) = 1$，而这两式仅在 a 或 b 为零时才能同时成立.

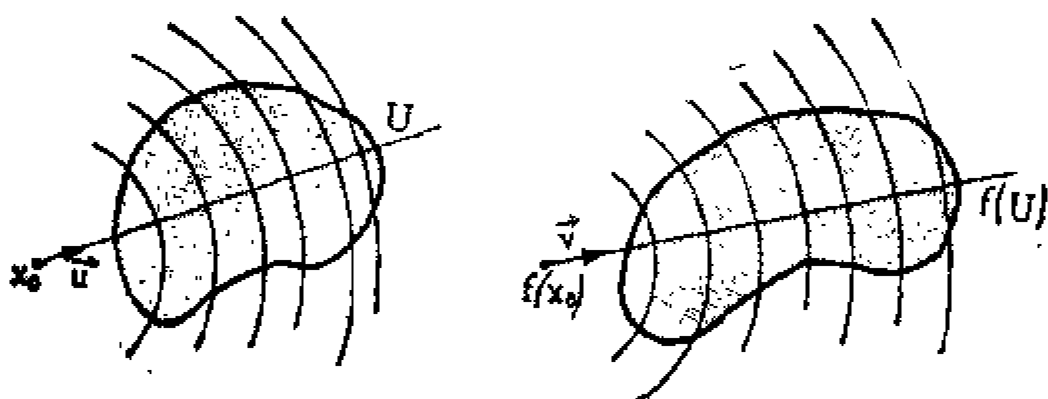


图 9.5.4.20.

9.5.4.21 附注. Liouville 的原始证明很有点特别，它用到的一些内容表面上看来都是跟定理风马牛不相及的：1）一组彼此沿曲率线相交的三重正交曲面(三维时)（Dupin 定理），2）球面的特征是所有的点都是脐点，或者说它们比通常的曲面的曲率线多得多. 最后则要用到 9.5.3.2.

9.5.5 脐状超曲面，循环点与相似

本段研究与8.8.6相对应的仿射情形；我们利用7.6及其记号：若X是欧氏仿射空间，则 $\tilde{X}^C$ 表示其射影完备化空间 $\tilde{X}$ 的复化空间. 我们有 $\tilde{X}^C = X^C \cup \infty_{X^C}$，这里 $\infty_{X^C} = P(\vec{X}^C)$，而 $p: \vec{X}^C \to P(\vec{X}^C)$ 总表示一个向量空间到它所定义的射影空间上的投影. 根据8.8.6并使用第十四章的语言，可以说二次型 N^C 在 $\infty_{X^C} = P(\vec{X}^C)$ 中定义了一个二次超曲面，其像为 $\Omega = p((N^C)^{-1}(0))$；注意到 $n = 2$ 时Ω仅含两个点，$n = 3$ 时Ω是锥面(参见14.1.3.7).

9.5.5.1 定义. ∞_{X^C} 的子集Ω称为欧氏仿射空间 X 的脐状超曲面. $n = 3$ 时Ω是锥面，$n = 2$ 时Ω仅含两点，称为X的循环点(或虚圆点)，记为 $\{I, J\}$. 给出X的定向等价于选定一个循环点，按8.8.6.2的约定记之为 I.

其实，不妨也可以把迷向直线 I, J 等同于它们在相应的射影空间里所给出的那两个点. 现将8.8.6.4和5.2.2结合在一起，就得出：

9.5.5.2 命题. 为使 $f \in \mathrm{GA}(X)$ 是相似，必须而且只须 $\tilde{f}^C(\Omega) = \Omega$. $n = 2$ 时，视 $\tilde{f}^C$ 使循环点各各不动或两相交换，而还有 $f \in \mathrm{Sim}^+(X)$ 或 $f \in \mathrm{Sim}^-(X)$.

9.5.5.3 例. X中两条直线 D, D' 的正交性可以表述为：

$$D \perp D' \Leftrightarrow [\infty_{D^C}, \infty_{D'^C}, I, J] = -1,$$

因为在调和分割的情形下并不会产生什么混淆(参见8.8.7.4).

9.6 平面相似

本节中，X表示定向欧氏仿射平面.

若X并无定向而又确有需要，则我们先将X定向. 本节尽量选用可以作出图形的初等的例子；另有一些例子及其图形出现在练习中. 前面五小段是平面相似的经典性质和记号的概述.

9.6.1 结构. 每个 $f \in \mathrm{Sim}^+(X)$ 都属下列类型之一：f是平移，或具有唯一的不动点ω即其中心，或是一个旋转与一个以ω为中心的位似的可交换积. 每个 $f \in \mathrm{Sim}^-(X)$ 都属下列类型之一：$f \in$

$\mathrm{Is}^{-}(X)$ 是平移对称，或 $f\in \mathrm{Sim}^{-}(X)\backslash \mathrm{Is}^{-}(X)$ 具有唯一的不动点 ω，或 f 是一个关于过 ω 的直线的对称与一个以 ω 为中心的位似的可交换积。

这一结构可从 9.3.4 和 9.5.2 看出。

9.6.2 单可迁性. 设 a, b, a', b' 是 X 中满足 $a\neq b$，$a'\neq b'$ 的任意四点，则存在 $\mathrm{Sim}^{+}(X)$ 中唯一的 f 使 $f(a)=a'$，$f(b)=b'$.

通过一个适当的位似变换，可化成等距：$ab=a'b'$ 的情形，然后可应用 9.1.6。

给定 a，b，a'，b' 后，我们要在几何上作出这个唯一的 f 的中心 ω；做法是取交点 $e=\langle a, b\rangle\cap\langle a', b'\rangle$，分别画出过 a, a'，e 和过 b, b', e 的两个圆；则两圆交点之一就是 ω（另一交点是 e，两圆相切时 e 与 ω 重合）。这种做法可由 9.5.3.1 和 10.9.4 得到说明，也可参阅 9.14.14。

9.6.3 正向相似的角. 该角就是 $f\in \mathrm{Sim}^{+}(X)$ 在 8.8.3 的分解下所相应的那个旋转在 $\mathfrak{A}(\vec{X})$ 中的转角。设该角为 α，则特别有：对任一定向直线 Δ，$\widehat{\Delta f(\Delta)}=\alpha$。

9.6.4 平面相似与复数. 先要提醒注意的是 8.3.12 和 8.8.4 所相应的仿射概念。设 X 是定向欧氏仿射平面；则 X 有一个自然的复仿射直线结构。

在这个自然结构下，就有 $\mathrm{GA}(X)=\mathrm{Sim}^{+}(X)$，在 X 的复仿射

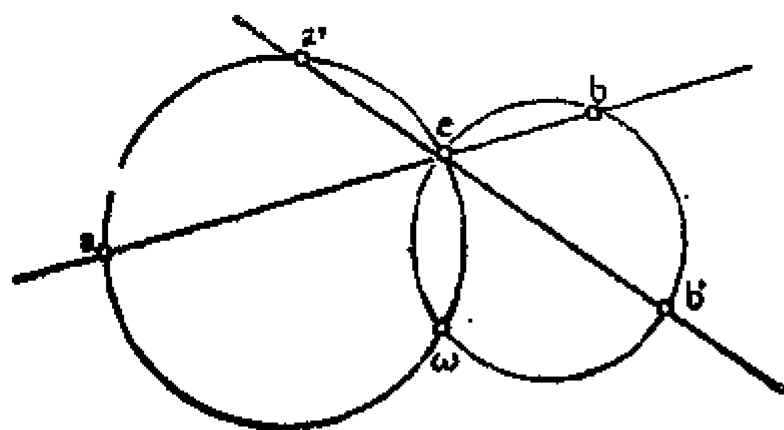


图 9.6.4.

空间的任一标架相应的坐标系下,每个 $f\in \mathrm{Sim}^+(X)$ 都形如 $z\longmapsto az+b$ 而每个 $f\in \mathrm{Sim}^-(X)$ 都形如 $z\longmapsto a\bar{z}+b$。于是 $f\in \mathrm{Sim}^+(X)$ 的角(参见 9.6.3) 就是复数 a 的辐角 (参见 8.7.8.4),而它的模就是 a 的模 $|a|$。

有了 $z\to az+b$ 的写法,$\mathrm{Sim}^+(X)$ 上的单可迁性以及具体的计算都成为很容易的了。

9.6.5 四点的交比. 由于 X 自然地是一条复仿射直线 $\underline{X}$,它就有一个射影完备化空间 $\tilde{X}$,那是一条复射影直线 $\tilde{X}=\underline{X}\cup\infty\underline{X}$ (参见 5.1.3)。注意不要将 $\tilde{X}$ 跟 9.5.5 中引进的 $\tilde{X}^C$ 混淆起来。一个是复射影平面,而另一个是复射影直线;一个有一条无穷远直线,而另一个只有一个无穷远点. 作为定义, X 中四点的交比就是它们在 $\tilde{X}$ 中的交比,也即在 $\mathbf{C}\cup\infty$ 中的交比,尤其当这四点各不相同时就是在 $\mathbf{C}$ 中的交比. 这个复数交比与 X 的欧氏结构之间的联系是很有趣的:

9.6.5.1 命题. 若 $z=[a,b,c,d]$,其中 $a,b,c,d\in X$,则 z 的模由下述距离之比决定: $|z|=\dfrac{ac}{bc}\Big/\dfrac{ad}{bd}$, z 的辐角则由下述定向角之差决定:

$$\arg(z)=\widehat{\overrightarrow{ca},\ \overrightarrow{cb}}-\widehat{\overrightarrow{da},\ \overrightarrow{db}}\ (\text{在 } \tilde{\mathfrak{A}}(\vec{X}) \text{ 中}).$$

9.6.5.2 上面的结论有不少很简单很初等的推论,对此我们不想详加说明,而仅将就其中两点略作考察。第一是对调和四边形,即 X 上使 $[a,b,c,d]=-1$ 的四点的讨论,请参阅 9.14.15. 第二是说明 $z=[a,b,c,d]$ 是实数的充要条件是其辐角为 0 或 ϖ,因此根据 8.7.7,这充要条件就是在 $\tilde{\mathfrak{A}}(\vec{X})$ 中 $\widehat{\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle}=\widehat{\langle d,a\rangle,\langle d,b\rangle}$;而我们又将看到这正是 a,b,c,d 共圆或共线的条件. 由此,比如说可以说明 $\underline{\tilde{X}}$ 的射影变换 $z\longmapsto\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将圆变成圆(或直线);事实上我们在第 20 章中会看到这个结论以更一般的形式出现,请参阅 18.10.4 和 20.6。

9.6.6 一种初等作图. 求作一个过定点 x 并与两条定直线 D，D' 相切的圆. $D\|D'$ 的情形留给读者；现令 $a=D\cap D'$，在 D，D' 和 x 所决定的凸形内任作与 D，D' 相切的圆 C. 我们的想法是找出以 a 为中心的位似，使之作用在 C 上后给出一个过 x 点的圆. 根据这一想法，即可如图 9.6.6 所示完成作图.

图 9.6.6.

9.6.7 相似形原理. 讨论这一原理，旨在求解下述问题："设 D，D' 是 X 中两条相异直线，m，m' 分别是 D，D' 上两点，并以成比例的速度各自在直线上运动. 直线 mm' 的包络是什么？"

9.6.7.1 设 f 是正向相似且使 $f(m)=m'$，$f(n)=n'$，其中 m，n 是直线 D 上两点，m'，n' 是 D' 上按运动规律相应的两点(参见9.6.2)； 则若 p，p' 是 m，m' 在 D，D' 上作直线运动的任一时刻所处的位置，必有 $f(p)=p'$，因为运动速度成比例和 $f\in \mathrm{Sim}^{+}(X)$ 两者都等价于 $\dfrac{\overrightarrow{m'p'}}{\overrightarrow{m'n'}}=\dfrac{\overrightarrow{mp}}{\overrightarrow{mn}}$ (参见 2.4.6). 我们所需要的原理就是："凡与点对 m，m' 正向相似关连的点必定也画出一条直线."实际上也是这样：

9.6.7.2 原理. 设 f 是 X 的正向相似，m'' 是与点对 $(m,m'=f(m))$ 正向相似关连的一点，即有一相似 $\vec{g}\in \mathrm{GO}^{+}(\vec{X})$ 使 $\overrightarrow{mm''}=\vec{g}(\overrightarrow{mm'})$ $\forall m\in X$，则 $m\longmapsto m''$ 是正向相似. 特别若 m 画出直线、圆等等，则 m'' 也画出直线、圆等等.

任取标架应用 9.6.4；就有 $f(z)=az+b$，$\vec{g}(\vec{u})=c\vec{u}$，其中

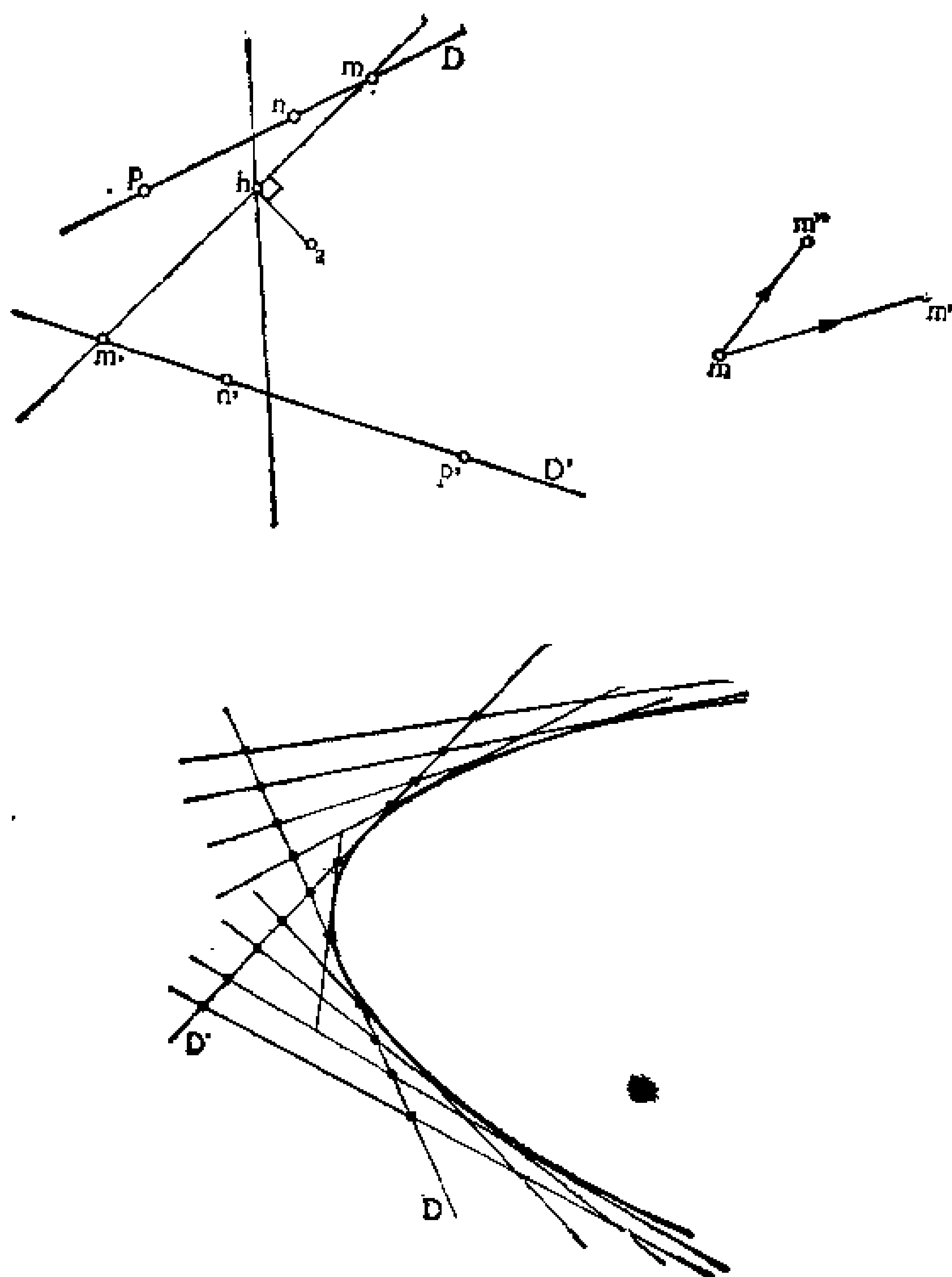


图 9.6.7.

$a, b, c \in \mathbf{C}$. 因此

$$m'' = m + mn'' = z + c(f(z) - z) = z + c(az + b - z)$$
$$= (ac - c + 1)z + bc,$$

而 $z \longmapsto (ac - c + 1)z + bc$ 显然是一个正向相似。

如果回到开始提出的问题，我们可以看到，从 a 向直线 $\langle m, m'\rangle$ 引出的垂线的垂足 h 是与 (m, m') 正向相似关连的。因为 a 就是相似 $m \longmapsto m'$ 的中心；因此 h 画出一条直线 E，而直线 $\langle m, m'\rangle$ 包络出一条以 a 为焦点并以 E 为顶点处切线的抛物线；参见 17.2.2.6。

关于原理 9.6.7.2 的其它应用，参见 10.13.18。

9.6.8 两个圆的双重垂足轨迹. 一条曲线 C 关于 a 点的垂足轨迹，是指使存在一条过 m 并与直线 $\langle a, m\rangle$ 正交的切线的 $m \in X$ 的集合；两条曲线 C, C' 的双重垂足轨迹，则是满足下列条件的 $m \in X$ 的集合：分别存在 C 的切线和 C' 的切线，它们都过 m 并且相互正交。

一个圆的垂足轨迹称为 Pascal 蚶线，它在别的场合也会遇到，其中有个原因就在于它是一条性质较简单的四次曲线(重圆点四次线)。图 9.6.8.1 列出了这类曲线的几种可能的情形，有尖点的那种情形称为心脏线，倘若读者对它感兴趣，还可以在 9.14.33 中找到它。也可参阅 9.14.22。 关于在二重点处的切线夹成 120° 角的 Pascal 蚶线，请参阅 [DQ] 第 169 页练习 77。

关于两条曲线的双重垂足轨迹，容易看出若两条曲线都是 C^1 类的正则闭曲线，则它们的双重垂足轨迹自然地分解成两条曲线 π 和 π'，它们分别由交于 m 的两条切线在 C, C' 的固定定向下的诱导定向而定。但这样分成两条曲线的分解，一般地说并不是双重垂足轨迹的真正的代数分解。下面将会看到，当 C 和 C' 都是圆时，存在一个真正的分解，在那种情形下我们要证明 π, π' 分别是两个圆关于相应的点的垂足轨迹。

9.6.8.1 两圆 C, C' 同心的情形是显而易见的，因此假定它们不同心。首先注意到恰好存在两个正向相似 f_1, f_2 使 $f_i(C) = C'(i = 1, 2)$ 且这两个相似的角都是直角(参见 8.7.3.5 和 9.6.3)；其实只要取 $m \in C$ 而 m'_1, $m'_2 \in C'$ 对径并使得 a 和 a' 是 C, C' 的中心，则有 $am \perp a'm'_i$，把使 $f_i(a) = a'$ 和 $f_i(m) = m'_i\ (i = 1, 2)$ 的正向相似记为 f_1, f_2 即可，根据 9.6.2，这两个相似确实存在

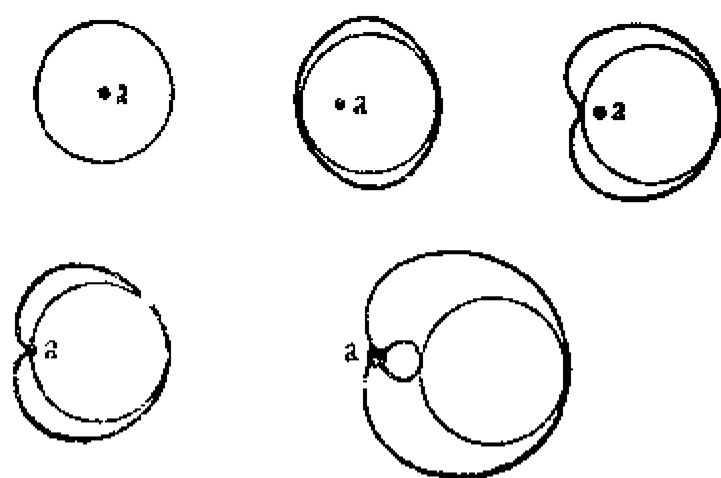


图 9.6.8.1.

并且是定义好的。

我们有 $f_i(C)=C'$，因为 $f_i(C)$ 是以 $f(a)=a'$ 为中心且半径等于 C' 的半径的圆，从而就是 C' 本身。分别记 C, C' 在 m, m'_i 的切线为 $D=T_mC$, $D'=T_{m_i}C'$，记 $x=D\cap D'$，记 h 为 f_i 的中心 ω_i 在 D 上的投影。我们要来应用下述显见的引理：

9.6.8.2 引理. 设 $\{a, b, c\}$, $\{a', b', c'\}$ 是两个直角三角形，即 $\langle a, b\rangle\perp\langle a, c\rangle$, $\langle a', b'\rangle\perp\langle a', c'\rangle$. 若要存在正向相似 f 使 $f(a)=a'$, $f(b)=b'$, $f(c)=c'$，必须且只须在 $\mathfrak{A}(\vec{X})$ 上有等式 $\widehat{\langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle}=\widehat{\langle b', a'\rangle, \langle b', c'\rangle}$. 而且 f 由这一共同的定向角所确定。

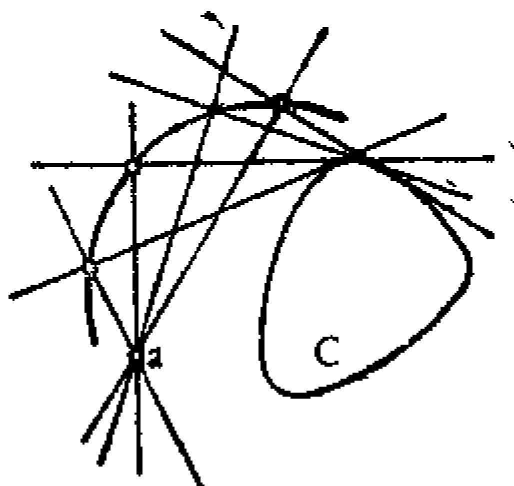


图 9.6.8.2.

9.6.8.3 由引理可知,角 $\widehat{\langle m_1', \omega_1\rangle, \langle m_1', m\rangle}$ 由 $\vec{f}_1$ 所确定,这是一个与 C, C' 以及 f_1 的选取无关的 $\alpha\in\mathfrak{A}(\vec{X})$. 根据 10.9.5, 有

$\alpha=\widehat{\langle m_1', \omega_1\rangle, \langle m_1', m\rangle}-\widehat{\langle xm, x\omega_1\rangle}$, 因为由

$$\widehat{\langle \omega_1, m\rangle, \langle \omega_1, m_1'\rangle}=\widehat{\langle x, m\rangle, \langle x, m_1'\rangle}=\delta$$

(参见 8.7.7.4 和 10.9.5) 可知 ω_1, m, m_1', x 是四点共圆的. 因此 $\widehat{\langle x, h\rangle, \langle x, \omega_1\rangle}=\alpha$; 由引理又可知 x 是 h 经由一个固定的相似 g_1 而得到的. 由于 h 画出 C 关于 ω_1 的垂足轨迹, 所以 x 画出 $g_1(\pi_1)$; 结果, C 和 C' 的双重垂足轨迹就由 $g_1(\pi_1)$ 和类似的另一曲线 $g_2(\pi_2)$ 组成.

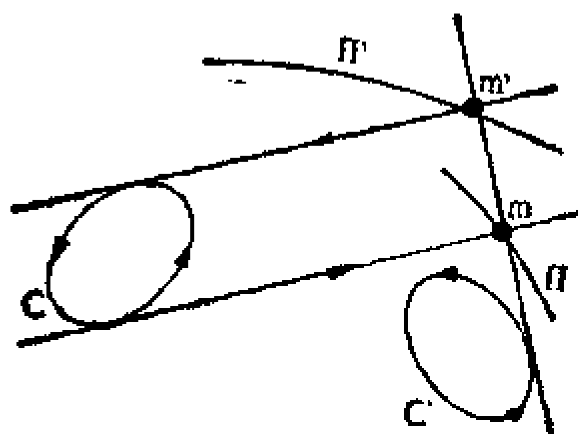


图 9.6.8.3.

9.6.9 "EADEM MUTATA RESURGO". 这里要说的是有关对数螺线的一个现象, 它曾经使 Jacob Bernouilli 赞叹不已, 以致最后让人把这种螺线和上面那句话一起刻到了他的墓碑上 (现存巴塞尔大教堂, 见 9.14.32): 从一个对数螺线出发,通过适当的相似变换总能使之整体不变. 这一现象很容易用 $\mathrm{Sim}_\omega^+(X)$($\omega\in X$ 给定)或 $\mathrm{Sim}^+(\vec{X})$ 含有非平凡子群的事实来加以说明.

9.6.9.1 对固定的 $k\in\mathbf{R}_+^*$ 和 $\omega\in X$, 引进

$$G=\{f(t)=H_{\omega,k^t}\circ\underline{\Theta}^{-1}(\Lambda(t)); t\in\mathbf{R}\}\subset\mathrm{Sim}_\omega^+(X),$$

其中 $H_{\omega,kt}$ 是以 ω 为中心、以 kt 为比值的位似，$\underline{\Theta}^{-1}(A(t))$ 表示以 ω 为中心、以 $A(t)$ 为转角的旋转。我们看到，G 是 $\mathrm{Sim}^{+}_{\omega}(X)$ 的一个子群，一个同胚(同构)于加法群 $\mathbf{R}$ 的单参数子群。对某个适当的 k，称 G 的一条异于 $\{\omega\}$ 的轨道为**以 ω 为极点的对数螺线**。

由定义可知，一条这样的对数螺线是在 G 下稳定的。对数螺线在任何相似变换下的像仍是对数螺线。对数螺线在前述“与 ω

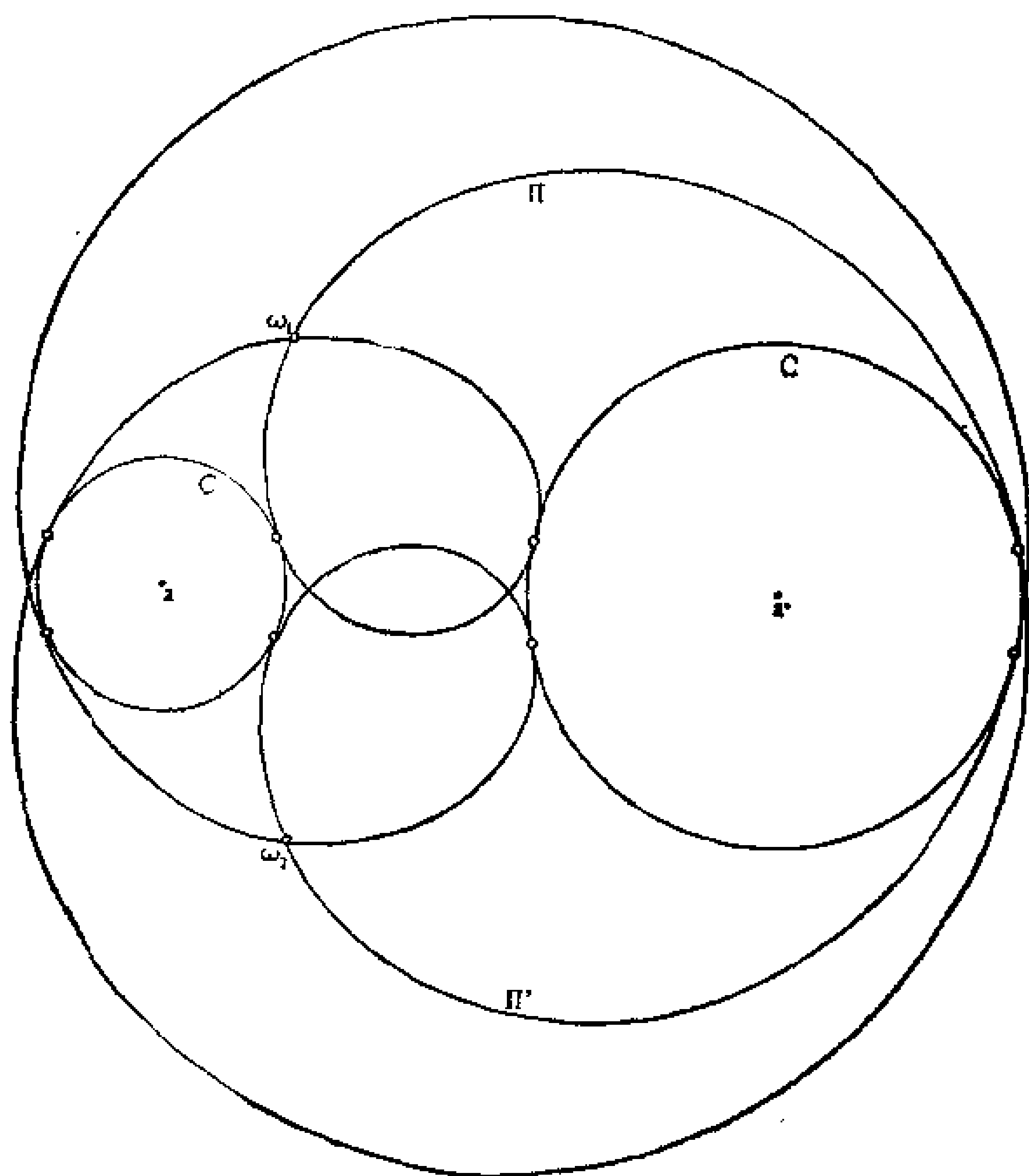


图 9.6.8.4.

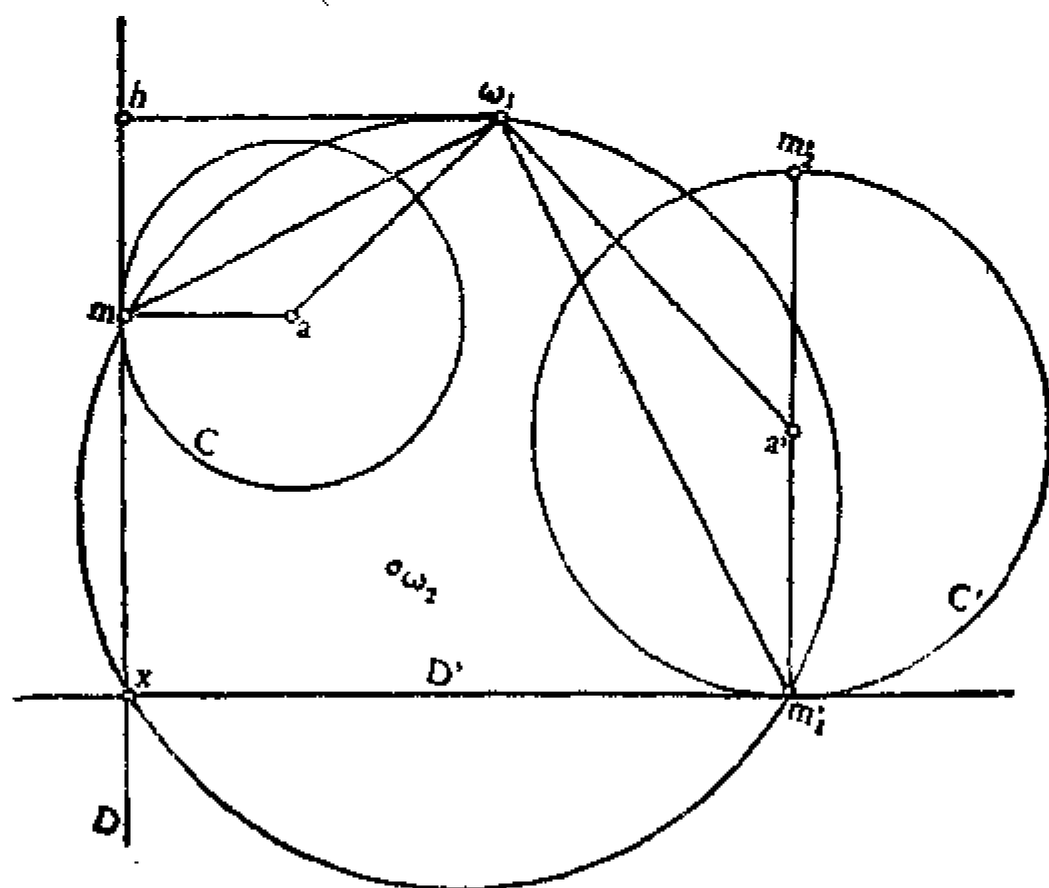


图 9.6.8.5.

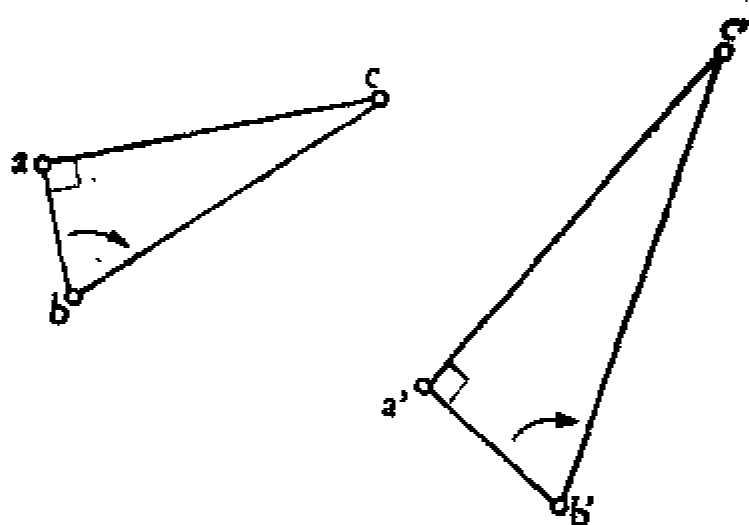


图 9.6.8.6.

正向相似关连"的做法下所导出的曲线也仍是对数螺线. 例如,应用 9.6.8.2 即可看出, 如果对数螺线 C 在 m 的切线 T_mC 跟直线 $\langle m, \omega\rangle$ 交成定角 $\widehat{\langle m, \omega\rangle, T_mC} \in \mathfrak{A}(\vec{X})$,则 C 关于中心 ω 的垂足轨迹仍是对数螺线. 这一点可证明如下: 由定义 G 在 C 上可迁,

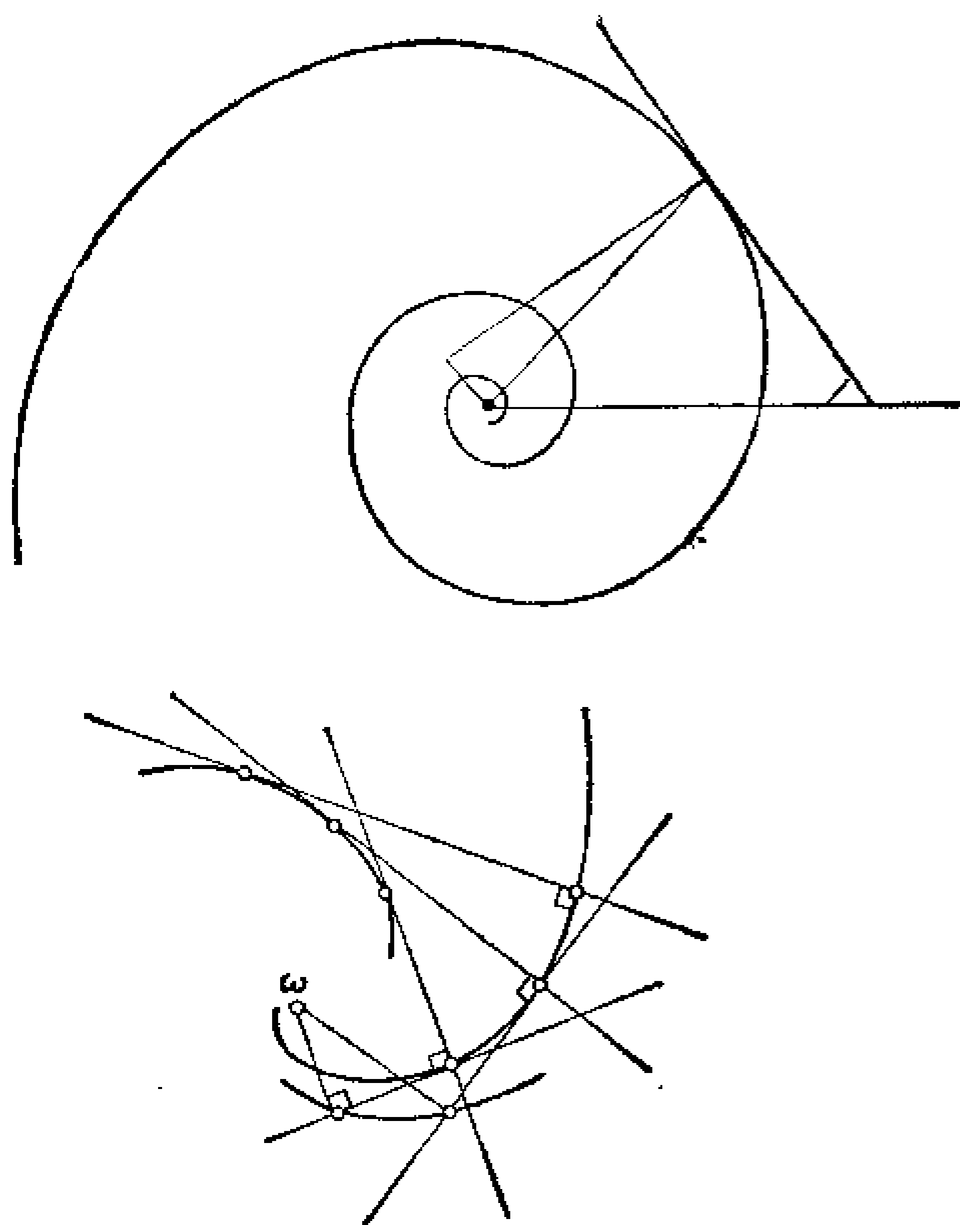


图 9.6.9.1.

故存在 $f\in G$ 使 $f(m)=n\ \forall m,\ n\in C$；特别有

$$\widehat{\langle m,\omega\rangle, T_mC}=\widehat{\langle f(m), f(\omega)\rangle, f(T_mC)}=\widehat{\langle n,\omega\rangle, T_nC}.$$

它的逆命题以及对数螺线的其它性质，除了 Bernouilli 的墓碑以外还可参阅 9.14.21。关于大自然中可遇的其它对数螺线，请参阅 [WL] 第 69—72 页.

9.7 几个点之间的距离

9.7.1 命题. 设 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,n}$ 是 X 的仿射标架；若两点 $x,\ y\in X$

满足 $x_ix = x_iy$ $\forall i = 0, 1, \cdots, n$，则 $x = y$．设 k 是任一整数，(x_i)，$(y_i)(i = 1, \cdots, k)$ 是 X 的两个子集并使 $x_ix_j = y_iy_j$ $\forall i, j$；则存在 $f \in \mathrm{Is}(X)$ 使 $f(x_i) = y_i$ $\forall i$.

将 X 在 x_0 处向量化，则 8.1.2.4 表明有内积等式 $(x_i|x) = (x_i|y)$ $\forall i$．而线性形式 $(x_i|\cdot)$ $(i = 1, \cdots, n)$ 是线性无关的，因为 (x_i) 是仿射标架，因此 $x = y$．

上段说明对第二个结论仅须就 $k \leqslant n + 1$ 以及子集 (x_i)，(y_i) 仿射无关的情形进行证明，甚至还不妨就假定 $k = n + 1$，这是因为 X 的两个子空间之间的等距 $f \in \mathrm{Is}(Y, Y')$ 总可平凡地扩充为 $\tilde{f} \in \mathrm{Is}(X)$ 而使 $\tilde{f}|_Y = f$．下面对 $n = k - 1$ 用归纳法；$n = 1$ 时，用 9.1.6 即可(或者也可从显然的情形 $n = 0$ 出发)．假定结论已对 n 成立，引进由所给子集生成的子空间：$Y = \langle x_0, x_1, \cdots, x_n\rangle$，$Y' = \langle y_0, y_1, \cdots, y_n\rangle$；存在 $g \in \mathrm{Is}(X)$ 使 $g(Y') = Y$．对 Y 的两个 n 维子集 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,n}$ 和 $(g(y_i))_{i=0,1,\cdots,n}$ 应用归纳假设，则可看出仅需对满足 $x_i = y_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 的 (x_i)，(y_i) 证明命题即可．将 X 在 x_0 处向量化，8.1.2.4 又表明

$$(x_i|x_{n+1}) = (x_i|y_{n+1}) \quad \forall i = 1, \cdots, n,$$

因此 x_{n+1}，y_{n+1} 属于 X 的同一条正交于 Y 的仿射直线 D．但

$$x_0x_{n+1} = x_0y_{n+1},$$

因此 9.2.3 表明 $d(x_{n+1}, Y) = d(y_{n+1}, Y)$，由此即得：或者 $x_{n+1} = y_{n+1}$，或者 $y_{n+1} = \sigma_Y(x_{n+1})$.

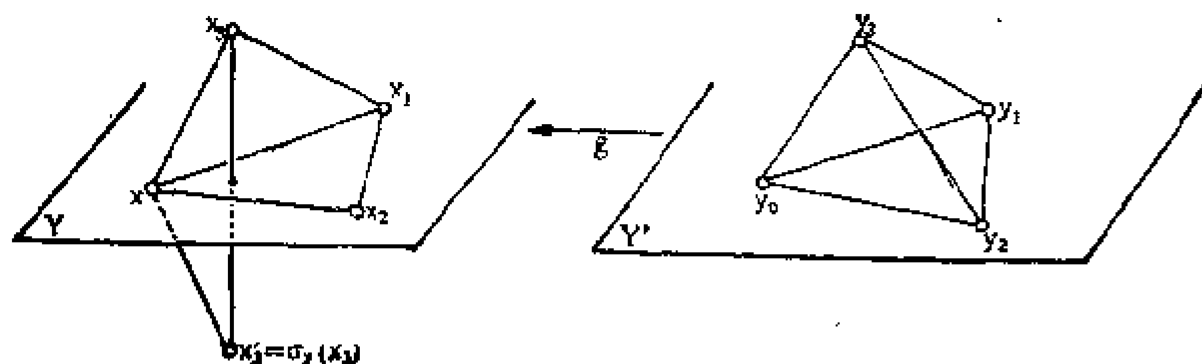


图 9.7.1.

9.7.2 **注.** 命题 9.7.1 表明了 $d_{ij}=x_ix_j$ 给定后子集 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,k}$ 的唯一性(至多相差一个等距). 存在性问题将在 9.7.3.4 中解决.

9.7.3 $n-1$ 维空间中 $n+1$ 个点之间距离的关系

9.7.3.1 很自然地会这样猜想: $n-1$ 维空间 X 中 $n+1$ 个点 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,n}$ 的距离 $d_{ij}=x_ix_j$ 之间有一个统一的关系式. $n=1$ 时, 由于三点中必有一点位于另两点之间, 乘积 $(d_{01}+d_{02}-d_{12})(d_{01}+d_{12}-d_{02})(d_{02}+d_{12}-d_{01})$ 就应为零. 在任意 n 维的情形, 9.7.1 的证明过程表明, 比如说在 2 维时若 x_1, x_1, x_2 以及 d_{13}, d_{23} 都已给定, 则 x_3 只存在两种选择可能, 而且它们是关于直线 $\langle x_1, x_2\rangle$ 对称的. 由此我们就可以设想存在一个统一的关系式. 下面就要找出这个关系式; 思路是设法在 $n+1$ 维空间中将 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,n}$ 生成的平行六面体的体积表示成距离 $d_{ij}=x_ix_j$ 的函数. 若 x_i 是在一个 n 维空间中, 则该体积为 0, 这就是我们要找的关系式. 而为了能做到这一点, 由 8.11.5 和 8.11.6 可知, 只要把 X 在 x_0 处向量化并在

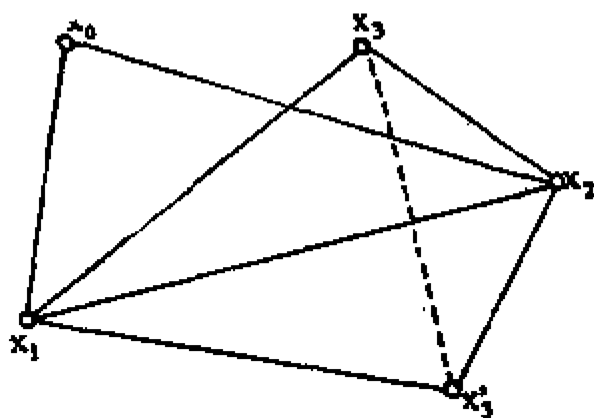


图 9.7.3.

$$(x_i|x_j)=\frac{1}{2}(d_{0i}+d_{0j}-d_{ij})$$

的形式下再用一次等式 8.1.2.4 就行了; 由此得出所需的关系式为

$$\begin{vmatrix} d_{01}^2 \cdots\cdots\cdots \frac{1}{2}(d_{01}^2+d_{0n}^2-d_{1n}^2) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{1}{2}(d_{10}^2+d_{n0}^2-d_{1n}^2) \cdots\cdots\cdots d_{0n}^2 \end{vmatrix}=0.$$

严格的证明则要将 X 嵌入一个 $n+1$ 维的 X', 然后, 比如说可对 x_0 处的向量化空间 X' 应用 8.11.8(ii) 和 (v).

关系式 9.7.3.1 的不便之处是关于所有指标并不对称, 指标 0 在其中起着特殊的作用. 定义 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,k}$ 的 Cayley-Menger 行

列式如下：

9.7.3.2 $$\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_k)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & \cdots & d_{0k}^2 \\ 1 & d_{10}^2 & 0 & \cdots & d_{1k}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & d_{k0}^2 & d_{k1}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

9.7.3.3 引理. 我们有(参见 8.11.5)：

$$\operatorname{Gram}(\overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k}) = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_k).$$

引理的证明可由 8.2.2，8.11.6 经计算得出；任取标准正交标架,将该标架下的 x_i 坐标记为 x_i^j. 于是,通过经典的行列式变换,依次得

$$\lambda_E(\overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k})=\begin{vmatrix} x_1^1-x_0^1 & \cdots & x_1^k-x_0^k \\ \vdots & & \vdots \\ x_k^1-x_0^1 & \cdots & x_k^k-x_0^k \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_0^1 & \cdots & x_0^k & 1 \\ x_1^1 & \cdots & x_1^k & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_k^1 & \cdots & x_k^k & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_0^1 & \cdots & x_0^k & 1 & 0 \\ x_1^1 & \cdots & x_1^k & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k^1 & \cdots & x_k^k & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

在最后的那个行列式 D 上乘以另一个行列式，即在 D 中对换最后两行和最后两列所得的行列式的转置行列式,就可得出：

$$\lambda_E^2(\overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_k})=-\begin{vmatrix} (x_0|x_0) & (x_0|x_1) & \cdots & (x_0|x_k) & 1 \\ (x_1|x_0) & (x_1|x_1) & \cdots & (x_1|x_k) & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_k|x_0) & (x_k|x_1) & \cdots & (x_k|x_k) & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

其中向量计算都是在所选标架中进行的. 以 $\frac{1}{2}(\|x_i\|^2+\|x_j\|^2-$

d_{ij}^2) 代替 $(x_i|x_j)$，并适当地通过先减去最后一列的倍数再减去最后一行的倍数，来消去所有的 $\|x_i\|^2$；这样就得到了

$$\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_k).$$

9.7.3.4 定理. 对 $n-1$ 维空间 X 中任意的 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,n}$，总有 $\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_n)=0$；$(x_i)_{i=0,1,\cdots,n-1}$ 成为 X 中单形的充要条件是 $\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})\neq 0$. 给定 $\frac{k(k+1)}{2}$ 个实数 $d_{ij}(i, j=0, 1, \cdots, k)$ 后，存在一个欧氏空间中的单形 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,k}$ 使 $d_{ij}=x_ix_j$ 的充要条件如下：对任何 $h=2, \cdots, k$ 以及 $\{0, 1, \cdots, k\}$ 中任何 h 个元素所组成的指标子集，相应的 Cayley-Menger 行列式恒不为零而且符号为 $(-1)^{k+1}$.

前两个结论可由 8.11.6 及 9.7.6.6 推出；最后一个结论的证明是对 k 用归纳法. $k=1$ 时是显然的. 根据归纳假设，可以先在一个 $k-2$ 维的 Z 中构造单形 $(x_i)_{i=2,\cdots,k}$ 使 $x_ix_j=d_{ij}$ $(i, j=2, \cdots, k)$，而后在 $k-1$ 维的 $Y\supset Z$ 中找出两点 x_0' 和 x_1，它们位于 $Y\setminus Z$ 中且使 $x_1x_i=d_{1i}$，$x_0'x_i=d_{0i}$ $\forall i=2, \cdots, k$. 把 x_0' 到 Z 上的投影记为 h，将 Y 作为超平面嵌入 k 维的 X 中，又设 X 中包含 h 并正交于 Z、余维数为 2 的子空间为 W；过 x 画出以 W 上的 h 为中心、过 x_0' 的圆 C. 该圆与 Y 还相交于 x_0''，而当 x 画出 C 时，距离 xx_1 画出区间 $[x_1x_0', x_1x_0'']$.

现在把 9.7.3.2 中的距离 d_{01}^2 换成一个任意实数 ξ，其它的 d_{ij} 保留不动；容易看出这样得出的行列式 $\Gamma(\xi)$ 必形如 $\Gamma(\xi)=-\xi^2\Gamma(x_2, \cdots, x_k)+\alpha\xi+\beta$，其中 $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$. 考察 $\xi\in\mathbf{R}_+$ 变化时 $\Gamma(\xi)$ 怎样变化；上式是 ξ 的二次三项式，根据假设 ξ^2 项系数的符号是 $(-1)^{k-1}$. 另一方面，根据定理的第一部分，当 ξ 取两个不同的值 $\xi'=x_1x_0'$ 和 $\xi''=x_1x_0''$ 时上式为零；因此当 $\xi\in[x_1x_0', x_1x_0'']$ 时它的符号都是 $(-1)^{k-1}$. 但 $\Gamma(d_{01})$ 不为零，且由假设其符号为 $(-1)^{k+1}=(-1)^{k-1}$，因此存在一点 $x_0\in C\setminus\{x_0', x_0''\}$ 使 $x_0x_1=d_{01}$.

图 9.7.3.4.

9.7.3.5 读者也许已经看出 9.7.3.4 的证明中有两点值得注意的地方；第一是假设条件并没有全部用到，尤其是当我们预先知道这些 x_i 存在并且构成一个单形时，它的任一子集必然也是单形。换句话说，我们不妨设想 Γ 满足下述纯代数的性质：若 $\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_k) \neq 0$ 而且符号为 $(-1)^{k+1}$，则自然就可推出 Γ 作用在任一子集上不为零而且有适当的符号。情况也确实如此，请参阅 9.14.23；由此可知 9.7.3.4 中的一个充分条件是以 $d_{ij}(i, j=0, \cdots, k)$ 为项的这一个行列式 $\neq 0$ 而且符号为 $(-1)^{k+1}$。

第二点是，倘若并非讨论单形，则 9.7.3.4 并没有回答 9.7.2 的问题；一般情形的解答并不见得更难些，只不过是稍长一些。这一解答将在 9.14.23 中给出。最后，[BL] 第 105—106 页中对问题给出了一种不同的提法，可资参考。

利用行列式 Γ 还可以研究 n 维空间 X 中 $n+2$ 个点的共球性（参见 9.7.5）以及计算一个单形的外接球面的半径。定义另一个

行列式Δ如下：

9.7.3.6

$$\Delta(x_1,\cdots,x_k)=\begin{vmatrix}0 & d_{12}^2 & \cdots d_{1k}^2\\ d_{21}^2 & 0 & \cdots d_{2k}^2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ d_{k1}^2 & d_{k2}^2 & \cdots 0\end{vmatrix}.$$

9.7.3.7 命题. 若 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 构成 $n-1$ 维空间 X 中的单形，则该单形的外接球面的半径 R 适合下式：

$$R^2=-\frac{1}{2}\frac{\Delta(x_1,\cdots,x_n)}{\Gamma(x_1,\cdots,x_n)};$$

特别是对单形来说 $\Delta(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$.

n 维空间 X 中 $n+2$ 个点 $(x_i)_{i=1,\cdots,n+2}$ 属于同一球面或同一超平面的充要条件是

$$\Delta(x_1,\cdots,x_{n+2})=0.$$

通过简单的行列式运算可以说明，若对 $i=1,\cdots,n$ 都有 $d_{0i}=R$，则 $\Gamma(x_0,x_1,\cdots,x_n)=-2R^2\Gamma(x_1,\cdots,x_n)-\Delta(x_1,\cdots,x_n)$；将 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 的外接球面的中心取作 x_0，则得出所求公式，因为由 9.7.3.4 有 $\Gamma(x_0,x_1,\cdots,x_n)=0$.

由此也可推出，若 x_i 共球，则 $\Delta(x_1,\cdots,x_{n+2})=0$；而反过来却未必显然. 下面我们直接证明 $\Delta(x_1,\cdots,x_{n+2})=0$ 是 x_i 共球或位于同一超平面的充要条件. 选取一个标准正交标架并设 x_i^j $(i=1,\cdots,n+2;\ j=1,\cdots,n)$ 是 x_i 的坐标. 若 x_i 属于同一超平面或球面，则存在不全为 0 的数 $a,b,c_j(j=1,\cdots,n)$ 使得：

$$a\|x_i\|^2+b+\sum_{j=1}^{n}c_jx_i^j=0\quad\forall i=1,\cdots,n+2,$$

对此例如可参阅 10.7.6. 由此推出下列两个行列式都等于0：

$$\begin{vmatrix}\|x_1\|^2 & 1 & x_1^1 & \cdots x_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \|x_{n+2}\|^2 & 1 & x_{n+2}^1 & \cdots x_{n+2}^n\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \|x_1\|^2 & -2x_1^1 & \cdots & -2x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \|x_{n+2}\|^2 & -2x_{n+2}^1 & \cdots & -2x_{n+2}^n \end{vmatrix} = 0.$$

因此它们逐行相乘的积等于 0，而这个积正是 $\Delta(x_1, \cdots, x_{n+2})$!

反过来，若 $\Delta(x_1, \cdots, x_{n+2}) = 0$，则第一个行列式等于 0，因此存在不全为 0 的 a, b, c_i 如上. 由 10.7.6 可知 x_i 都属于由下列方程确定的球面或超平面：

$$a\|\cdot\|^2 + b + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot = 0.$$

9.7.3.8 例. 令 $a = d_{12}$, $b = d_{23}$, $c = d_{31}$, 则 $\Gamma(x_1, x_2, x_3) = -(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$, 这就是三角形面积用边长来表示的公式：见 10.3.3.

若令 $\alpha = d_{12}d_{34}$, $\beta = d_{13}d_{24}$, $\gamma = d_{14}d_{23}$, 则有 $\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) = -(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)$, 这就是 Ptolémée 定理：见 10.9.2.

9.7.4 度量空间的一个基本问题. 欧氏仿射空间的特殊地位，使我们不禁要问，是否可能在度量空间中仅仅按照度量的条件(比如说，不知道 X 是向量空间等等)来对欧氏仿射空间进行分类. 这一基本问题已由 K. Menger 于 1928 年解决；读者可在 [BL] 第 IV 章找到完整的解答；Cayley-Menger 行列式是解决这个问题的关键工具，证明看来并不比 9.7.3.4 困难多少.

对其它的经典度量空间也可以提出类似的问题，例如球面，椭圆空间和双曲空间(参见 18.4.7, 19.1.2.5 和 19.2.11). 在 [BL] 中也可以找到完整的解答. 应该指出，若要对没有其它附加结构的度量空间进行系统的研究，[BL] 是一本极为出色的参考书.

9.7.5 垂直平分超平面

9.7.5.1 命题. 给定 X 上不同两点 x, y 后，集合 $\{z \in X : zx = zy\}$ 是一个超平面，称为 x 和 y 的垂直平分超平面 ($n = 2$ 时为垂直平分线).

更一般地，若 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,k}$ 是仿射无关的，则

$$\{z\in X: zx_0 = zx_1 = \cdots = zx_k\}$$

是 $n+1-k$ 维子空间；特别当 $k=n$ 即当 (x_i) 是单形时，存在唯一的一点与该单形的所有顶点等距；或者说(参见 10.7)：一个单形有唯一的外接球面。

证明的要点是将 X 在 x_0 处向量化，再如上面多次所做的那样，说明距离关系式给出了数量积；然后应用 2.4.8。

9.7.6 Appolonius 公式：重心与距离. 沿用 3.4.5 的记号和概念，我们有：

9.7.6.1 Appolonius 公式. 设$\{(\lambda_i, x_i)\}$是X中质点的有限集，$\left(\sum_i \lambda_i, g\right)$ 或即 $(0, \vec{\xi})$ 是其重心，则有

$$\forall z\in X:\ \sum_i \lambda_i z x_i^2 = \sum_i \lambda_i g x_i^2 + \left(\sum_i \lambda_i\right) z g^2$$

或

$$\forall z\in X:\ \sum_i \lambda_i z x_i^2 = \sum_i \lambda_i y x_i^2 + 2(\overrightarrow{zy}\,|\,\vec{\xi}).$$

只要写出 $zx_i^2 = zg^2 + gx_i^2 + 2(\overrightarrow{zg}\,|\,\overrightarrow{gx_i})$ 并应用 3.4.6.5 即可。

9.7.6.2 推论. 条件与 9.7.6.1 相同，另外 k 是一个给定的实数，则 $L=\left\{z\in X: \sum_i \lambda_i z x_i^2 = k\right\}$ 是：

——$\sum_i \lambda_i = 0$ 时：对任何 k 都是一个以 $(\vec{\xi})^\perp$ 为方向的仿射超平面；

——$\sum_i \lambda_i > 0$ 时：若 $k < \sum_i \lambda_i g x_i^2$：$L=\varnothing$，

若 $k \geqslant \sum_i \lambda_i g x_i^2$：

$$L = S\left(g,\ \sqrt{\frac{k-\sum_i \lambda_i g x_i^2}{\sum_i \lambda_i}}\right).$$

这里，$S(x, r)$ 表示以 x 为中心、r 为半径的球面。$\sum_i \lambda_i < 0$ 的情形，读者可自行补出。

9.7.6.3 推论. 在 9.7.6.1 的条件上再加上 $\sum_i \lambda_i > 0$，则函数 $z \longmapsto \sum_i \lambda_i zx_i^2$ 在 g 达到唯一的极小值.

9.7.6.4 推论 9.7.6.3 表明，有限个质点的重心在任一使质点组整体稳定的等距下不变；但这个结论也可由 3.7.3 和 9.1.3 更简捷地得出.

9.7.6.5 推论 9.7.6.2 给出了数量可观的简单"几何轨迹"的性质. 首先，取 $\{(1, x), (-1, y)\}$ 就又会得出 9.7.5.1. 其次，更一般地，到两定点 x，y 的距离之比为常数的点的轨迹 $\left\{z \in X: \frac{zx}{zy} = k\right\}$ 是一个以 $\frac{x}{1-k} - \frac{ky}{1-k}$ $(k \neq 1)$ 为中心的球面. 同样，$\{z \in X: zx^2 + zy^2 = k\}$ 是一个球面，而 $\{z \in X: zx^2 - zy^2 = k\}$ 则是一个超平面；在第一种情形，公式

$$zx^2 + zy^2 - 2zg^2 + 2gx^2 = 2zg^2 + \frac{xy^2}{2}$$

称为"中线公式".

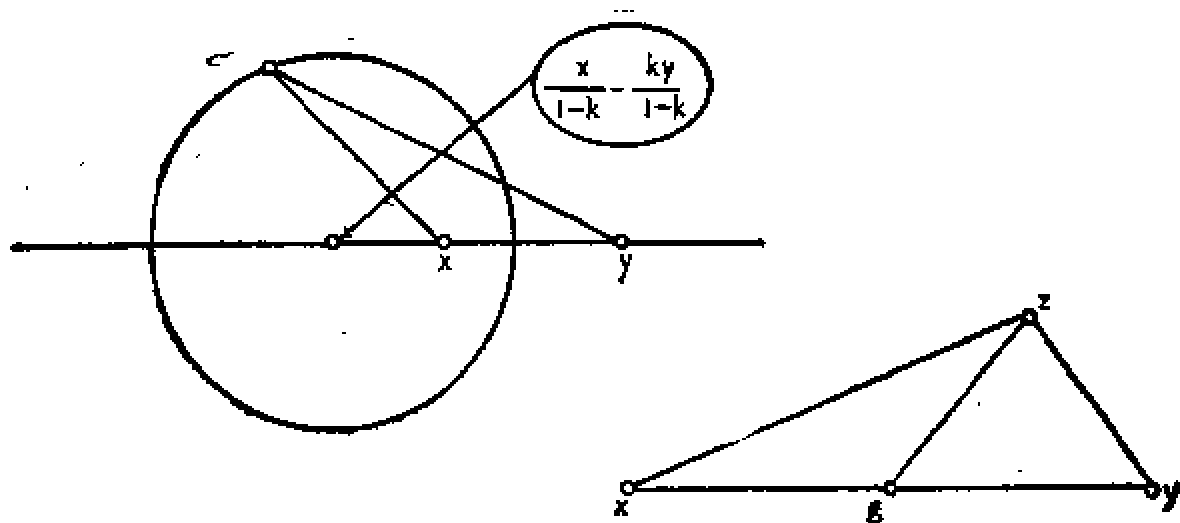


图 9.7.6.5.

最后，$\{z: zx^2 - zy^2 = k\}$ 是一个与 $\overrightarrow{xy}$ 正交的超平面.

9.7.6.6 有了公式 9.7.6.1，就可以不借助行列式(参见 9.7.3.3)而证明 9.7.3.4 的开头部分；具体证明如下：x_i 中总有一点是其它点的重心(参见 3.6)，假设该点就是 x_n，则

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x_i \text{ 而 } \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = 1.$$

引进质点组 $\{(\lambda_0, x_0), \cdots, (\lambda_{n-1}, x_{n-1}), (-1, x_n)\}$；则其重心就是 $(0, \vec{0})$，因为 $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0$ 而

$$\vec{\xi} = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x_i - x_n = \vec{0}!$$

根据 9.7.6.1，函数 $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i z x_i^2$ 与 z 无关，设其值为 k；以 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 代替 z，即得出：

$$\begin{array}{rl}
\lambda_1 d_{01}^2 + \lambda_2 d_{02}^2 + \cdots + \lambda_{n-1} d_{0,n-1}^2 - d_{0n}^2 &= k \\
\lambda_0 d_{10}^2 \qquad + \lambda_2 d_{12}^2 + \cdots + \lambda_{n-1} d_{1,n-1}^2 - d_{1n}^2 &= k \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\lambda_0 d_{n0}^2 + \lambda_1 d_{n1}^2 + \lambda_2 d_{n2}^2 + \cdots + \lambda_{n-1} d_{n,n-1}^2 &= k \\
\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} - 1 &= 0,
\end{array}$$

因此有 $\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 0$.

9.8 子集的稳定子群

9.8.1 为研究子集 $A \subset X$，自然会想到定义 A 在 $\mathrm{Is}(X)$ 里的稳定子群或迷向子群 $\mathrm{Is}_A(X) = \{g \in \mathrm{Is}(X): g(A) = A\}$. $\mathrm{Is}_A(X)$ 越大，A 的对称性越强；A 的性状与 $\mathrm{Is}_A(X)$ 相关. 在第一章里我们已经接触过 $\mathrm{Is}_A(X)$，以后在 12.5 节还会遇到. 从 X 的子集所成的集合到 $\mathrm{Is}(X)$ 的子群所成的集合间有一个映射 $\chi: A \mapsto \mathrm{Is}_A(X)$，这个映射在后面起着主导作用.

9.8.2 注. 如果 A 是紧集且 $g \in \mathrm{Is}(X)$，那么从 $g(A) \subset A$ 可导出 $g(A) = A$. 但若 A 仅仅是闭集或者有界集时，则上述结论不成立. 可参见 9.14.26.

把 A 的闭包记为 $\bar{A}$，一般说来 $\mathrm{Is}_A(X) \subsetneq \mathrm{Is}_{\bar{A}}(X)$（参见 9.14.27）. 子集 A 关于它从 X 诱导得的度量有一个等距变换群

$\mathrm{Is}(A)$，这样就得到限制映射 ρ: $\mathrm{Is}_A(X)\to\mathrm{Is}(A)$。一般说来 ρ 不是单射：例如设 $A=Y$ 是 X 的真子空间，对称 σ_Y 就在 Y 上诱导了恒等映射．不过只要 $[A]=X$，ρ 就是单射．与此相反的是 ρ 总是满射，这可从 9.7.1 得出．

至于 χ，它既不是单射又不是满射．这是因为图 9.8.2 的两个图形有相同的对称群．另一方面取定 $\omega\in X$ 后，$G=\mathrm{Is}^+_\omega(X)$ 不可能是任何子集 A 的迷向子群，这是因为 G 的轨道都是以 ω 为中心的球面的并集，它们都以 $\mathrm{Is}_\omega(X)$ 作为迷向子群．但如 G 是 $\mathrm{Is}(X)$ 的有限子群，那么总存在 $A\subset X$ 使得 $G=\mathrm{Is}_A(X)$（参见 9.14.36）．



图 9.8.2.

9.8.3 闭性． 一般地说，与 $\mathrm{Is}_a(X)(a\in X)$ 相反，$\mathrm{Is}_A(X)$ 在 $\mathrm{Is}(X)$ 内不是闭集：例如把 $\mathrm{Is}(X)$ 内由一个无理角旋转生成的子群取为 G，把 G 的一个轨道取为 A．但当 A 是 X 的闭子集时，$\mathrm{Is}_A(X)$ 也是 $\mathrm{Is}(X)$ 的闭子集;

9.8.4 有界性． 如果 A 有界，那么 $\mathrm{Is}_A(X)$ 总是有界．这是因为以下将看到 $\mathrm{Is}_{\bar{A}}(X)$ 是紧集，并且有 $\mathrm{Is}_A(X)\subset\mathrm{Is}_{\bar{A}}(X)$（见 9.8.2）．反之当 A 不是有界集时 $\mathrm{Is}_A(X)$ 也可能有界：见 9.14.27．

9.8.5 有限性． 当 A 不是有限集时 $\mathrm{Is}_A(X)$ 仍可能是有限集（见 9.14.27）．但当 A 是有限集时 $\mathrm{Is}_A(X)$ 不必有限：例如当 A 包含在一个子空间内并且 $\dim X-\dim[A]\geqslant 2$ 时．反之若

$$\dim[A]\geqslant\dim X-1,$$

那么只要 A 有限，$\mathrm{Is}_A(X)$ 也有限．为看出这一点，只须确定怎样的 $g\in\mathrm{Is}(X)$ 能在 A 上诱导出恒等变换．由于这样的 g 也在 $[A]$

上诱导出恒等变换，所以当 $[A]=X$ 时，$g=\mathrm{Id}_X$，当 $[A]$ 是超平面时，$g=\mathrm{Id}_X$ 或 $\sigma_{[A]}$。

9.8.6 紧性和不动点

9.8.6.1 命题. 如果 A 是 X 的紧子集，则存在 $x\in X$ 使得 $\mathrm{Is}_A(X)\subset\mathrm{Is}_x(X)$，特别，$\mathrm{Is}_A(X)$ 是 $\mathrm{Is}(X)$ 内的紧集. 如果 $G\subset\mathrm{Is}(X)$ 是紧集，则存在 $x\in X$ 使得 $G\subset\mathrm{Is}_x(X)$。

只要任取 G 的一个轨道，就可从前半部分结论导出后半部分结论. 前半部分中"特别"后面的断言可从 9.8.3 以及 $\mathrm{Is}_x(X)$ 是紧集（见 8.2.3.3）这些事实由第一个断言推导出. 而第一个断言至少可用三种方法加以证明.

9.8.6.2 第一种证明. 这就是 2.7.5.9 的证明. 在这里，内部非空的条件并不是必要的，因为 $\mathrm{Is}_x(X)$ 总是紧的（与 $\mathrm{GA}_x(X)\cong\mathrm{GL}(X)$ 相反）.

9.8.6.3 第二种证明. 这是 11.5.8 的结果. 事实上，如果 B 是 X 中含 A 的具有最小半径的唯一圆球，则从 $g(A)=A$ 可得 $g(B)=B$，这是因为 B 是唯一的而且仅仅由度量性质所定义. 要找的不动点 x 就是 B 的中心.

9.8.6.4 第三种证明（Bruhat-Tits 引理）. 这个引理肯定了在一个比欧氏仿射空间更一般的度量空间内，紧子集的等距变换群总有不动点存在. 当然这个度量空间要满足一些条件，除 X 外还有不少其它空间也满足这些条件，尤其是双曲空间（见 19.4.7）.

要知道 9.8.6.1 并不对任意的度量空间都成立. 譬如说以 x 为中心的球面 S 有等距变换群 $\mathrm{Is}(S)$，但这个群没有不动点，并且 $\mathrm{Is}(S)\cong\mathrm{Is}_x(X)$ 是紧的，S 也是紧的.

在欧氏仿射空间内，以下条件（CN）被两个点的中点所满足，而且取的是等号，这就是 9.7.6.5 所给出的中线公式. 以后将看到对于双曲空间内的线段的中点，条件（CN）也能满足（见 19.4.7）. 但球面不满足此条件.

9.8.6.5 引理（Bruhat-Tits, [B-T], 63 页）. 设 X 是完备度量空间，满足以下条件：

$$(CN)\begin{cases}\text{对任意的 } x, y\in X\text{，存在 } m\in X \text{ 使得}\\ d^2(x, z)+d^2(y, z)\geqslant 2d^2(m, z)+\frac{1}{2}d^2(x, y)\ \forall z\in X,\end{cases}$$

则对X的任一有界子集A存在点$x\in X$使得$g(x)=x\forall g\in \mathrm{Is}(X)$，并且$g(A)=A$.

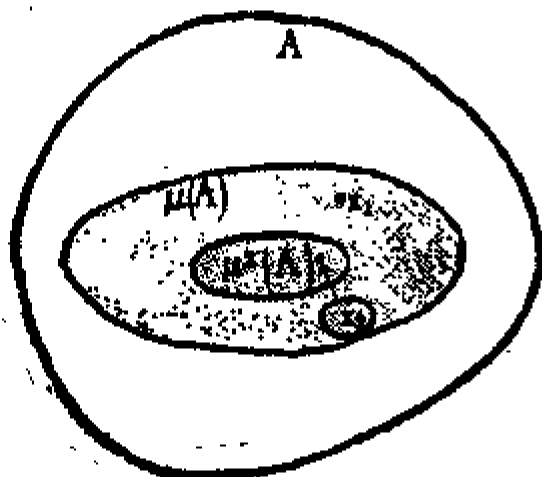


图 9.8.6.5.

证明的思路如下：假设A是紧子集，从A出发可作一个子集$\mu(A)$：对于A中满足$d(x, y)=\mathrm{diam}(A)$的一切点对$\{x, y\}$，通过(CN)条件可以得到点m，这些m就构成了$\mu(A)$. 这样，(CN)保证$\mathrm{diam}(\mu(A))\leqslant\lambda\mathrm{diam}(A)$，而且$\lambda<1$是普遍适用的. 于是得到了直径趋于0的紧子集的下降序列，它们的交就是所求的点.

以下给出当A是完备空间X的有界子集时的详细证明. 这就是一般的情形. 我们取定$k\in]0, 1[$，并且对任一子集Y取Y内使$d(x, y)\geqslant k\,\mathrm{diam}(Y)$的点对$\{x, y\}$的由$(CN)$条件给出的点$m$的集合，记为$\mu(Y)$.

从条件(CN)可得

$$\sup\{d(x, y): x\in Y,\quad y\in\mu(Y)\}\leqslant k_1\,\mathrm{diam}(Y).$$

$$\mathrm{diam}(\mu(Y))\leqslant k_2\,\mathrm{diam}(Y).$$

其中$k_1=\sqrt{1-k^2/4}$，$k_2=\sqrt{1-k^2/2}$. 利用归纳法，令

$$\mu^n(Y)=\mu(\mu^{n-1}(Y)).$$

设 A 有界，则从前面的不等式首先可得

$$\operatorname{diam}(\mu^n(A)) \leqslant k_2^n \operatorname{diam}(A) \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

因而 $\mu^n(A)$ 的交集至多是一个点．但这个交集也不是空集：设 $(x_n)_{n\in N}$ 是点 $x_n \in \mu^n(A)$，$n \in \mathbf{N}$ 的任一序列，则它是一个 Cauchy 序列，因为根据前面的不等式有 $d(x_n, x_{n+1}) \leqslant k_1 k_2^n \operatorname{diam}(A)$．这个序列收敛于 $x \in X$，从而 $\bigcap_{n\in N} \mu^n(A) = \{x\}$．但 $\mu^n(A)$ 是从 A 出发纯粹由度量条件定义的，因而 $\mu^n(A)$ 在 $\operatorname{Is}_A(X)$ 下保持稳定，x 也保持不变．

9.8.7 注． 如同 2.7.5.11 那样可以看出 $\operatorname{Is}(X)$ 的极大紧子群都是共轭的．

9.8.8 例． 请参见 1.7.5.1 的证明以及 [B-T] 第 64 页．

9.9 曲线的长度

在这一节中 M 是任意的度量空间，其距离记为 $d(\cdot,\cdot)$．

9.9.1 定义． M 中的一条曲线就是 $([a, b], f)$，其中 $[a, b]$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个区间 $(a < b)$，$f:[a, b] \to M$ 是一个连续映射．$([a, b], f)$ 的端点是 $(f(a), f(b))$，其中 $f(a)$ 是起点，$f(b)$ 是终点．以 (x, y) 为端点的曲线的集合记为 $C(x, y)$．f 的*长度*是 $\mathbf{R}_+ \cup \infty$ 中的一个元素 $\operatorname{long}(f)$ 定义为

$$\operatorname{long}(f) = \sup\left\{\sum_{i=0}^{n-1} d(f(t_i), f(t_{i+1}));\ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,\ n \in \mathbf{N}^*\right\}.$$

当 $\operatorname{long}(f) \in \mathbf{R}_+$ 时，称曲线 f 为*可求长的*．

9.9.2 注． $C(x, y) \neq \emptyset \quad \forall x, y \in M$ 相当于说 M 是弧连通的．如果 $\theta:[c, d] \to [a, b]$ 是同胚映射，$f:[a, b] \to M$ 是 M 的曲线，则总有

$$\operatorname{long}(f\circ\theta) = \operatorname{long}(f).$$

因此可把长度看成是定义在曲线集合关于上述等价关系所得的商

集上的，这样就得到了几何弧的概念，但在本书中并不用到此概念。

请注意象 9.9.2 那样的图假定了连接 $(f(t_i), f(t_{i+1}))$ 的"线段"的存在性，关于这一点请参看 9.9.4.2。

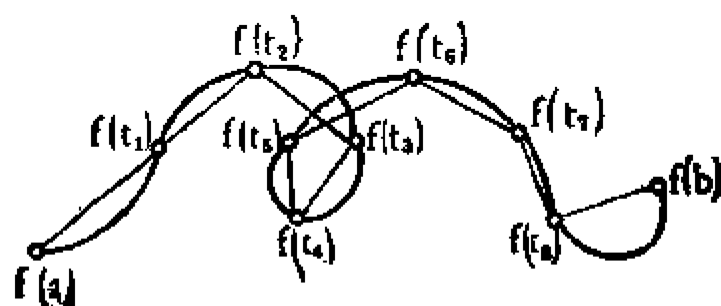


图 9.9.2.

9.9.3 例

9.9.3.1 我们总有 $\operatorname{long}(f) \geqslant d(x, y) \forall f \in C(x, y)$.

9.9.3.2 如果 $f:[a, b] \to M$, $g:[b, c] \to M$ 是两条曲线使得 $f(b) = g(b)$，则曲线 $f \cup g:[a, c] \to M$ 满足

$$\operatorname{long}(f \cup g) = \operatorname{long}(f) + \operatorname{long}(g).$$

9.9.3.3 甚至对很好的 M 也可能存在不可求长的曲线. 例如在平面 $\mathbf{R}^2$ 内把图形 9.9.3.3.1 迭代无穷多次，可得映射 $f:[0,1] \to \mathbf{R}^2$. 首先要证这样做法可收敛于一个连续映射 f，我们把它留给读者. f 的长必须 $\geqslant (4/3)^n \forall n \in \mathbf{N}^*$，因而是无穷大. 此外，对于使 $t < t'$ 的 $t, t' \in [0, 1]$，限制映射 $f|_{[t,t']}$ 的长仍然是无穷大.

这样的曲线尽管看起来有些反常，但还是很自然的. 我们在岩岸的外形里遇得到这种曲线. 关于这一题目的更多的讨论可参看 [MJ].

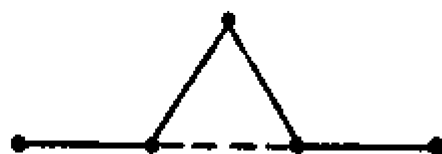


图 9.9.3.3.1.

9.9.4 线段、内蕴空间及优异空间

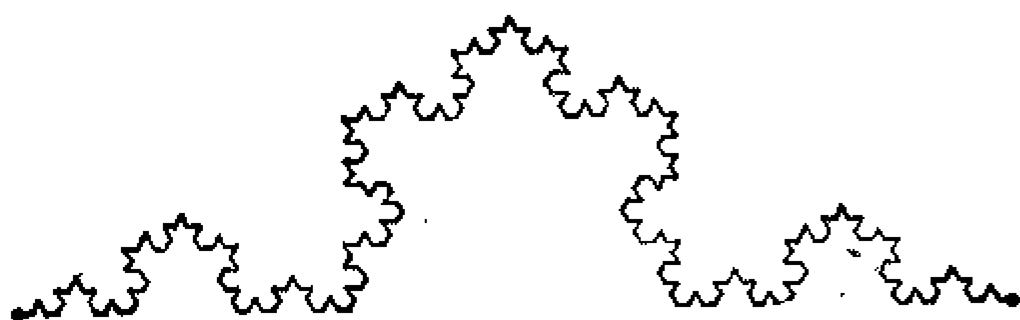


图 9.9.3.3.2.

9.9.4.1 定义. 曲线 $f:[a,b]\to M$ 如果满足 $d(f(t),f(t'))=t'-t\ \forall t,\ t'\in[a,b],\ t<t'$，就称为线段. 特别，

$$\operatorname{long}(f)=d(f(a),f(b)).$$

9.9.4.2 这里定义的线段与在 3.4.3 内引入的欧氏仿射空间 X 内以 $x,\ y\in X$ 为端点的线段 $[x,y]$ 的概念并无分歧. 实际上对任意的 $a\in\mathbf{R}$，一个那样的线段可唯一确定一个线段 f:

$$[a,a+d(x,y)]\ni t\longmapsto f(t)=x+\frac{t-a}{d(x,y)}\overrightarrow{xy}\in X.$$

一般说来，即使 $C(x,y)\neq\emptyset$ 时，在M内也有可能不存在以 (x,y) 为端点的线段. 足以保证这一存在性的相当一般的条件可参见 [CT]第 135 页或 [BL] 第 40 页.



图 9.9.4.2.

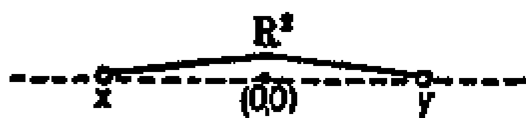


图 9.9.4.3.1.

9.9.4.3 很容易找到一个反例: 取 $M=\mathbf{R}^2\backslash(0,0)$，它的距离是从 $\mathbf{R}^2$ 诱导而得的，$x\in M$是任意一个点，$y=-x$，则不存在以 $(x,-x)$ 为端点的线段，这是因为它的长应该是 $2\|x\|$，但只有线段 $[x,-x]$ 的长才等于 $2\|x\|$，不幸的是这个线段包含$(0,0)\notin M$. 另一个例子是球面 $S^n\subset\mathbf{R}^{n+1}$，带有由 $\mathbf{R}^{n+1}$ 诱导的距离. 对任意的 $x,\ y\in S^n,\ x\neq y$，S^n 里以 (x,y) 为端点的任一曲线 f 的长 $\operatorname{long}(f)>d(x,y)$，这是因为 $\operatorname{long}(f)\geqslant d(x,f(t))+d(f(t),y)\forall t\in]a,b[$，并且

$$d(x, f(t)) + d(f(t), y) > d(x, y)$$

(参见 9.1.1.1). 这些反例使人得出以下定义.

9.9.4.4 定义. 如果度量空间 M 是弧连通的并且

$$d(x, y) = \inf\{\text{long}(f): f \in C(x, y)\} \quad \forall x, y \in X,$$

则称 M 为内蕴空间. 如果对任意的 $x, y \in M$ 存在以 (x, y) 为端点的线段,则称 M 为优异的.

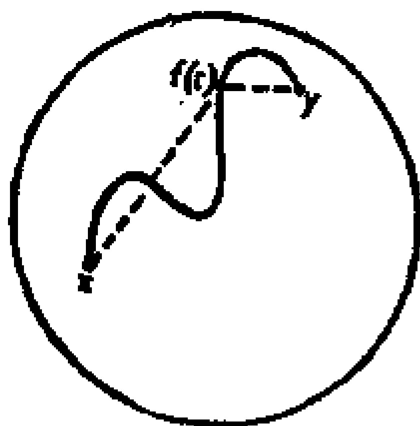


图 9.9.4.3.2.

9.9.4.5 例. 根据 9.9.4.1 可知一个优异空间总是内蕴的. 但 9.9.4.3 的第一个例子表明反之不一定对.

从 9.4.4.2 可知欧氏仿射空间是优异的. 此外 9.1.1.1 表明当端点给定时,线段是唯一的(可能相差定义区间的一个平移).

以后将看到优异空间的其它例子: 18.4.2, 19.1.2 及 19.3.2.

从球面的例以及后面 9.9.8 的圆周的例可看出, 与欧氏仿射空间不同, 在一个优异空间内, 给定端点间的线段并不总是唯一的.

9.9.4.3 的第二个例子告诉我们, 当 S^n 带着由 $\mathbf{R}^{n+1}$ 诱导的距离时,它不是内蕴度量空间. 在 18.4 中将设法补救这一缺陷.

9.9.5 最短路径. 我们通常说在一个欧氏空间内从一个点到另一点的最短路径是以这两点为端点的线段. 更精确地说: 如果 f 是以 (x, y) 为端点的曲线且 $\text{long}(f) = d(x, y)$, 则对 f 的定义区间 $]a, b[$ 中的任两个满足 $t \leqslant t'$ 的 t, t', 有

$$f(t') \in [x, y] \text{ 以及 } f(t) \in [x, f(t')].$$

这个结论可从 9.1.1.1 以及下面的初等事实得出: 如果

$$\text{long}(f) = d(x, y),$$

则对任意的 $t \in [a, b]$, 有

$$\text{long}(f|_{[a,t]}) = d(x, f(t)) \text{ 以及 } \text{long}(f|_{[t,b]}) = d(f(t), y).$$

9.9.6 注. 回想一下(见 [DR] 第 314 页), 在欧氏仿射空间 X 内如果曲线 $f: [a, b] \to X$ 是 C^1 类的,则它是可求长的而且长度等

于

$$\operatorname{long}(f)=\int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

更一般地，这一类公式对于欧氏仿射空间的微分子流形、甚至抽象黎曼流形的曲线也有效。如果这些流形是完备的，就总能得到优异的度量而且线段是局部唯一的。这些概念导出了测地线的基本概念。关于其推广可参看［KG1］第 114 页或［MA］第 271 页。

9.9.7 内蕴度量的构造法. 如果 (M, d) 是一个非内蕴度量空间，有一个方法几乎总是能给出一个内蕴度量 $\bar{d}$:

9.9.7.1 命题. 设 (M, d) 是一个度量空间使得 $\forall x, y\in X$，存在 $f\in C(x, y)$ 使 $\operatorname{long}(f)<\infty$，则
$\bar{d}: M\times M\ni(x, y)\longmapsto\bar{d}(x, y)=\inf\{\operatorname{long}(f): f\in C(x, y)\}\in\mathbf{R}_+$
是 M 上的一个距离。并且是内蕴的。此外 $\bar{\bar{d}}=\bar{d}$。我们把证明留给读者，参看 9.14.30。结论中的 $\bar{\bar{d}}=\bar{d}$ 说明这个方法用一次就到底了。

当度量空间是 (S^n, d) 时(其中 d 是由 $\mathbf{R}^{n+1}$ 诱导的度量)，那末得到的新度量 $\bar{d}$ 正是 8.6.3 内引入的度量 $\bar{d}(x, y)=\operatorname{Arc}\cos((x|y))$。在 9.9.8 将当 $n=1$ 时研究这个度量，在 18.4.3 将对任意的 n 进行研究，如果把圆周 S^1 参数化为 $t\longmapsto(t,\sqrt{1-t^2})$ 并借助 9.9.6 计算 $\bar{d}$，就再次导出利用积分 $\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$ 而得到的角的测度，这个方法比复指数 A 的方法稍初等些。参看 8.3.13。

9.9.8 圆周 S^1 的内蕴度量. 这里涉及的是欧氏向量平面 X 的一个圆周 C，就是 $C=\{x\in X: \|x\|=1\}$。这个圆周可等同于 X 的半直线的集合(见 8.6.1)。这样就有:

9.9.8.1 定理. 关于 $\overline{xy}=\operatorname{Arc}\cos((x|y))$，$C$ 是一个内蕴度量空间。要使 $\overline{xy}+\overline{yz}=\overline{xz}$ 的充要条件是半直线 $\mathbf{R}_+y$ 在 $\mathbf{R}_+x$ 与 $\mathbf{R}_+z$ 之间(见 8.7.5.2)。给出了 $x, y\in C$，如果 $y\neq -x$，则存在从 x 到 y 的唯一最短路径(见 9.9.5)，这就是从 x 到 y 的圆弧(见 8.7.5.4)；如果 $y=-x$，则恰好有两条最短路径，这就是以

(x, y) 为端点的两个半圆周。

对于三个点 $x, y, z \in C$，除去其中两个点是相等或相对(这时可直接解决)的情形外，只有以下四种可能的位置：

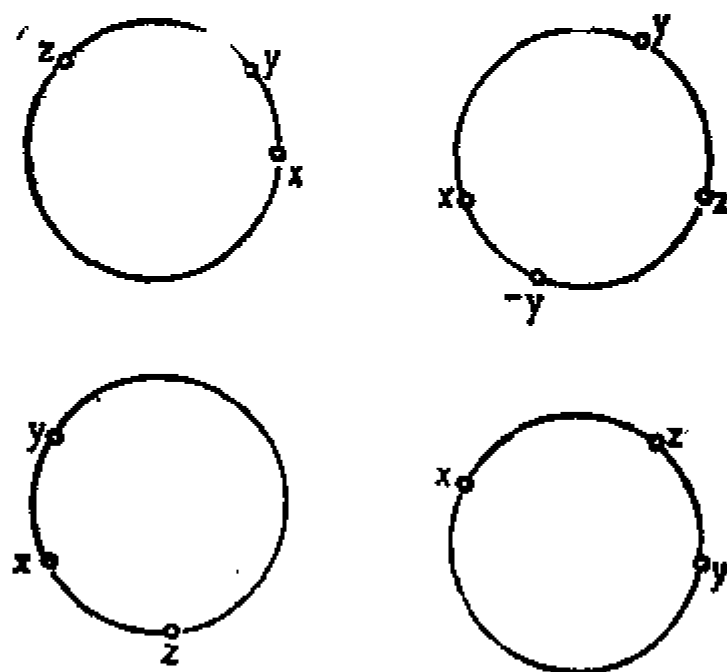


图 9.9.8.1.

在第一种情形有 $\overline{xy}+\overline{yz}=\overline{xz}$，在第二种情形是 $\overline{xy}+\overline{yz}+\overline{xz}=2\pi$，在第三种情形有 $\overline{xz}=\overline{yz}-\overline{xy}$，第四种情形是 $\overline{xz}=\overline{xy}-\overline{yz}$。这些结果都来自 8.7.5.3. 由于在第二种情形里有 $\overline{xy}+\overline{yz}>\pi$，因此不论在哪种情形都有 $\overline{xy}+\overline{yz}\geqslant\overline{xz}$，此外等号仅在第一种情形里才能成立。$(C, \overline{\cdot\cdot})$ 是一个度量空间。为了说明它是内蕴的，我们证明它是优异的。设 $x, y\in C$，根据 8.7.5 的作法，当 $\overline{xy}=t$ 时，我们先给平面 X 定向并把以 (x, y) 为端点的曲线取为



图 9.9.8.2.

$f:[0, t] \ni s \longmapsto \cos s \cdot e_1 + \sin s \cdot e_2 \in C$. 对于使 $s \leqslant s'$ 的 $s, s' \in [0, t]$，我们有 $\overline{f(s)f(s')} = s' - s$，因此 f 确实是一个线段. 至于有关最短路的断言，这可从定理前半部分对严格三角等式 $\overline{xy} + \overline{yz} = \overline{xz}$ 的研究以及 9.9.5 节末尾的评论推导出来.

9.9.9 附注. 关于一般度量空间的曲线的性质以及不用微分学而定义曲率、挠率的方法，可参看 [BL] 第 74 页以后或 [B-M] 第 10 章，也可参看 9.14.30.

9.10 度量及微分几何：第一变分公式

这个公式的名称听起来似乎很深奥，实际上就是给出欧氏仿射空间上距离函数 $d: X \times X \to \mathbf{R}$ 的导数 d'. 但是它有很多有趣的推论. 读者也可参看 9.10.7.

9.10.1 第一变分公式. 对于 $x, y \in X$，$x \neq y$ 以及 $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{X}$:

$$d'(x, y)(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{\|\vec{xy}\|}(\overrightarrow{xy} | \vec{v} - \vec{u})$$

$$= \|\vec{v}\| \cos(\overline{\vec{v}, \overrightarrow{xy}}) - \|\vec{u}\| \cos(\overline{\vec{u}, \overrightarrow{xy}}).$$

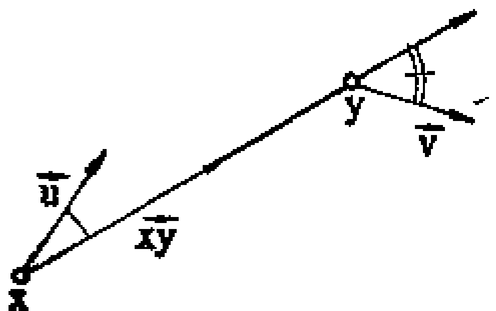


图 9.10.1.

在最后一个式子中出现了有向直线间的夹角，可参看 8.6.3. 为了证明 9.10.1，把 d 的平方记为 e，所以

$$e(x, y) = d^2(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|^2.$$

从求导公式可导出

$$e'(x, y)(\vec{u}, \vec{v}) = 2(\overrightarrow{xy} | \vec{v} - \vec{u}),$$

这是因为纯量积是一个双线性型(可参见[CH1]，第 33 页)，然后因 $d=\sqrt{e}$，就能得到所求的公式。

9.10.2 如果有两条曲线 C 和 C' 始终正交于一个直线族 $D(t)$，这样 9.10.1 的公式里的两个角都是 $\pi/2$ 于是它们的余弦等于 0，就可知道有 $d(C\cap D(t),\ C'\cap D(t))=$ 常数. 作为其特例，一条位于以 x 为中心的球面上的曲线在 m 点的切线与直线 $\langle x, m\rangle$ 正交(与 10.7.4 比较)。

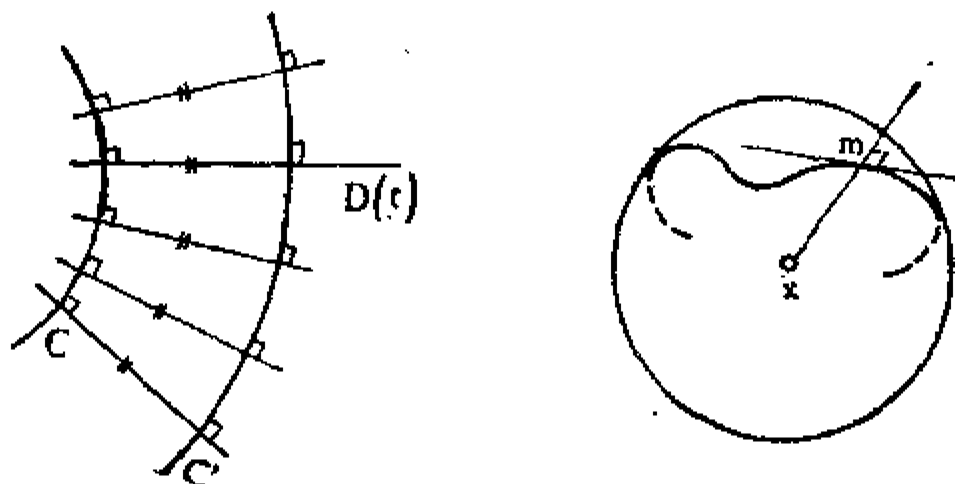


图 9.10.2.

9.10.3 设 $x(t)$ 是一个点，它变化时描出一条 C^1 类正则曲线 C (即 $x'(t)\neq 0\ \forall t$)，$T_{x(t)}C$ 是 C 在 $x(t)$ 处的切线，$y(t)$ 是 $T_{x(t)}C$ 的点，它变化时描出一条曲线 D，而且 D 始终与 $T_{x(t)}C$ 正交于 $y(t)$。例如当 C 是 D 的法线的包络时，它就符合上述假设，这时 C 被称为 D 的渐屈线。在这样的假设下，对任意的参数 s，t，都有

$$|x(t)y(t)-x(s)y(s)|=\operatorname{long}(C|_{[s,t]}).$$

这是因为在 9.10.1 的公式中可取 $\vec{u}=x'(t)$，$\vec{v}=y'(t)$，这样，$\vec{v}$ 与 $\overrightarrow{xy}$ 的夹角是 $\pi/2$，其余弦为 0，而 $\vec{u}$ 与 $\overrightarrow{xy}$ 的夹角为 0 或 π，从而 $d'(x(t),\ y(t))(x'(t),\ y'(t))=\pm\|x'(t)\|$，把它从 s 到 t 求积，考虑到 9.9.6 的公式，就可得出前面给出的公式。

9.10.4 在 17.6.4 中将要用到一个稍微复杂一点的类似例子：设两个点 $x(t)$ 和 $y(t)$ 描绘出同一条正则曲线 C，切线 $T_{x(t)}C$ 和 $T_{y(t)}C$ 相交于 $z(t)=(T_{x(t)}C)\cap(T_{y(t)}C)$，$z(t)$ 又描出一条曲线

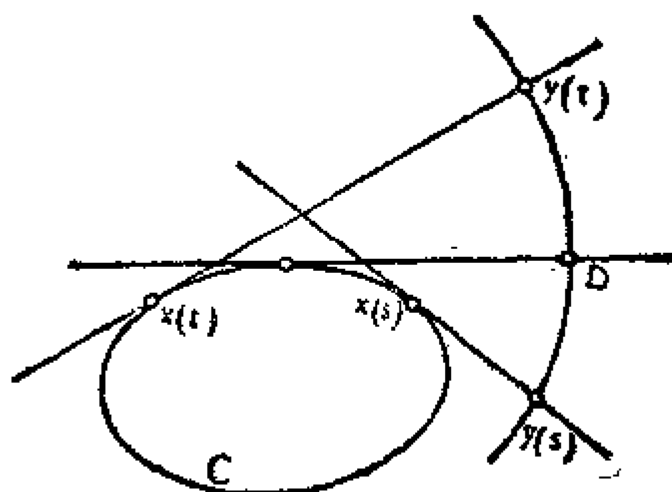


图 9.10.3.

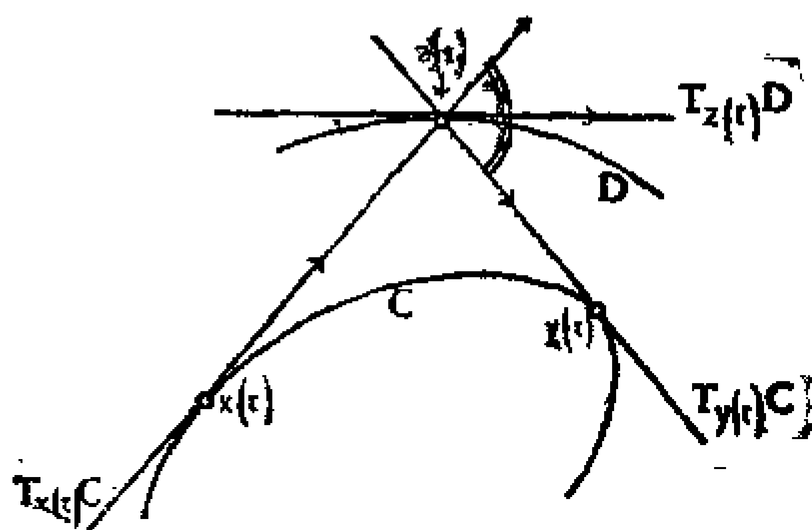


图 9.10.4.

D，使得切线 $T_{z(t)}D$ 是有向直线 $\overrightarrow{z(t)x(t)}$，$\overrightarrow{z(t)y(t)}$ 的外角平分线，则

$$x(t)z(t)+y(t)z(t)-\operatorname{long}(C|_{从x(t)到y(t)})=\text{常数}.$$

事实上，根据 9.9.6 和 9.10.1，函数 $F(t)$ 的导数是

$$F'(t)=\|z'(t)\|\cos(\overrightarrow{x(t)z(t)},\ z'(t))-\|x'(t)\|+\|z'(t)\|$$
$$\times\cos(\overrightarrow{y(t)z(t)},\ z'(t))+\|y'(t)\|-\|y'(t)\|+\|x'(t)\|,$$

利用外角平分线的假设，就可把含 $\|z'(t)\|$ 的两个项消去。

9.10.5 公式 9.10.1 应该能使人猜想到 9.4.1.1. 事实上，若 $F=ax+bx$ 在 x 处取极小值，则对于向量 $\vec{\xi}\in\vec{D}$ 有

$$F'(x)(\vec{\xi}) = \|\vec{\xi}\|[\cos(\vec{\xi}, \overrightarrow{xa}) + \cos(\vec{\xi}, \overrightarrow{xb})] = 0,$$

所以D应该是 $\overrightarrow{xa}$ 与 $\overrightarrow{xb}$ 的外角平分线。

9.10.6 公式 9.10.1 也能使人猜测到 Fermat 问题的解：在欧氏平面内找一个点x使得 $ax + bx + cx$ 达到极小，这里$\{a, b, c\}$是一个三角形。设极小值在x达到而且x不是顶点，那么对任意的 $\vec{u} \in \vec{X}$ 应该有

$$\left(\vec{u}\left|\frac{\overrightarrow{ax}}{\|\overrightarrow{ax}\|}\right.\right) + \left(\vec{u}\left|\frac{\overrightarrow{bx}}{\|\overrightarrow{bx}\|}\right.\right) + \left(\vec{u}\left|\frac{\overrightarrow{cx}}{\|\overrightarrow{cx}\|}\right.\right) = 0.$$

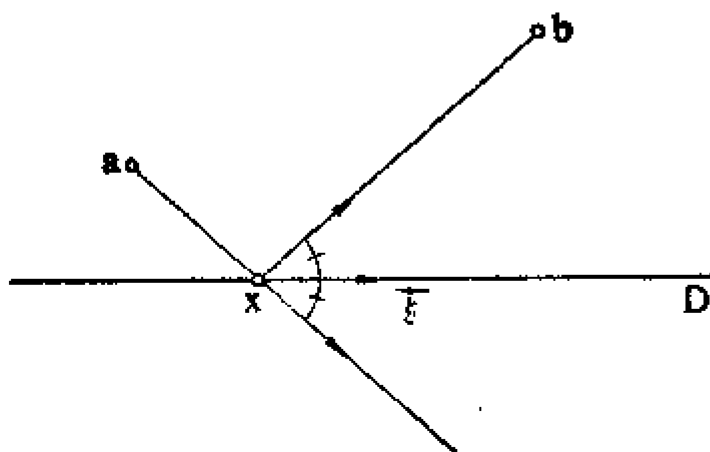


图 9.10.5.

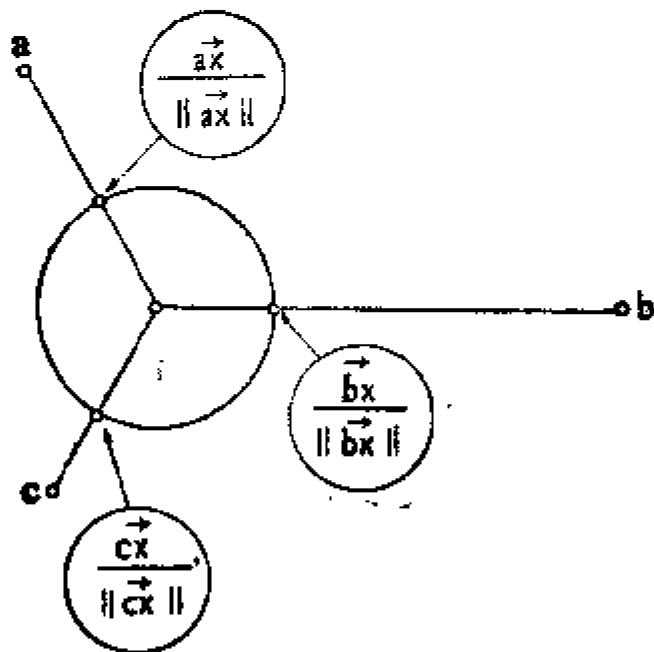


图 9.10.6.

也就是说在 $\overrightarrow{ax}$, $\overrightarrow{bx}$, $\overrightarrow{cx}$ 上的三个单位向量应该加起来等于零，而这个条件等价于它们在 x 点形成的角等于 $2\pi/3$. 从这一点出发就能使我们在 10.4.3 得到问题的解.

9.10.7 附注. "第一变分"意指计算的是一阶导数 d'. 计算 d'' 并没有多大意义，因为我们能直接得到 9.2.2 那样的结果. 反之，在抽象 Riemann 流形或欧氏空间的子流形的情形下对 d'' 的计算(称为"第二变分公式")是 Riemann 几何的基本工具. 正是从这个公式人们才导出了这个领域里的大部分整体结果. 事实上在这个二阶导数里出现了流形的曲率(在欧氏空间的情形曲率等于0). 关于这些问题的最新参考文献可见[KO-NO2]第 VIII 章或[G-K-M]第 121 页以后.

9.11 紧子集间的 Hausdorff 距离

以后，主要在第 12 章里将需要在欧氏仿射空间的所有紧子集的集合上作出一个度量空间的结构. 这个度量应归功于 Hausdorff，我们先在一个更广泛的背景上建立这个度量.

9.11.1 记号. 设 X 是度量空间. 把 X 的所有紧子集的集合记为 $\mathscr{K}=\mathscr{K}(X)$. 如果 F 是 X 的子集，ρ 是 $\geqslant 0$ 的实数，置(参见 0.3)

$$U(F,\rho)=\{x\in X:d(x,F)<\rho\},$$
$$B(F,\rho)=\{x\in X:d(x,F)\leqslant\rho\}.$$

如果 F, G 是 X 的两个子集，置

$$\delta(F,G)=\inf\{\rho:F\subset B(G,\rho)\ 以及\ G\subset B(F,\rho)\};$$

$\delta(F,G)$ 称为 F 与 G 之间的 Hausdorff 距离.

请不要把 $\delta(F,G)$ 与 $d(F,G)$ 混淆(参见 0.3)!

9.11.2 定理. Hausdorff 距离使 $\mathscr{K}(X)$ 成为度量空间. 如果再假设 X 使得所有的有界闭集都是紧集，那么当 X 完备时，$(\mathscr{K}(X),\delta)$ 也完备. 当 X 是紧集时，$(\mathscr{K}(X),\delta)$ 也是紧集.

函数 $\delta(\cdot,\cdot)$ 显然是对称的. 如果 $\delta(F,G)=0$，就有 $F\subset$

$B(G, 0) = \overline{G} = G$ 以及 $G \subset F$，从而 $F = G$。设 F, G, H 是三个任意子集。从 $G \subset B(H, \sigma)$ 可推导出 $B(G, \rho) \subset B(H, \sigma + \rho)$，从而 $F \subset B(H, \sigma + \rho)$。同样可知

$$G \subset B(F, \rho) \Rightarrow B(G, \sigma) \subset B(F, \rho + \sigma) \Rightarrow H \subset B(F, \rho + \sigma).$$

如果 $\delta(F, G) = \rho$，$\delta(G, H) = \sigma$，则 $\delta(F, H) \leqslant \rho + \sigma$。

今后我们写成 $\mathscr{K}(X)$ 或 $\mathscr{K}$，不再指明它带有 Hausdorff 度量 δ。设 $(F_n)_{n \in N}$ 是 $\mathscr{K}$ 内的 Cauchy 序列，对 $n \in N$ 令 $G_n = \overline{\bigcup_{p \in N} F_{n+p}}$，这里的 $\overline{\cdot}$ 表示闭包。G_n 的序列是下降的，并且每个 G_n 都是有界的：因为 (F_n) 是 Cauchy 序列，存在一个 n_0 使得 $\delta(F_n, F_{n_0}) \leqslant 1\ \forall n \geqslant n_0$，于是 $F_n \subset B(F_{n_0}, 1)\ \forall n \geqslant n_0$。根据假设，$G_n$ 作为有界闭集也是紧的。从一般拓扑学的经典结果（见 0.4）可知交集 $F = \bigcap_{n \in N} G_n$ 非空，因此 $F \in \mathscr{K}$。剩下要证的是在 $\mathscr{K}$ 内有 $F = \lim_{n \to \infty} F_n$。对于给定的 $\varepsilon > 0$，设 n_0 使得 $\delta(F_n, F_{n_0}) \leqslant \varepsilon\ \forall n \geqslant n_0$，则

$$F \subset G_{n_0} \subset B(F_{n_0}, \varepsilon).$$

反之，存在 n_1 使得 $G_n \subset B(F, \varepsilon)\ \forall n \geqslant n_1$。如果 $n \geqslant \sup(n_0, n_1)$，则 $\delta(F, F_n) \leqslant \varepsilon$。

为了证明 X 紧时 $\mathscr{K}$ 也紧，我们使用前面已证的完备性质以及下述判别法则："紧性等价于完备性加上准紧性"。所谓准紧性

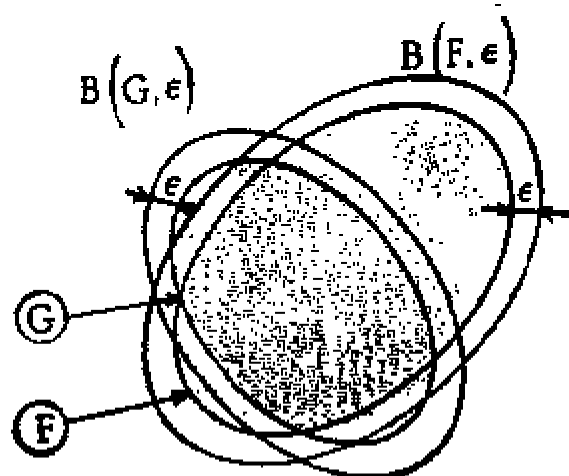


图 9.11.1.

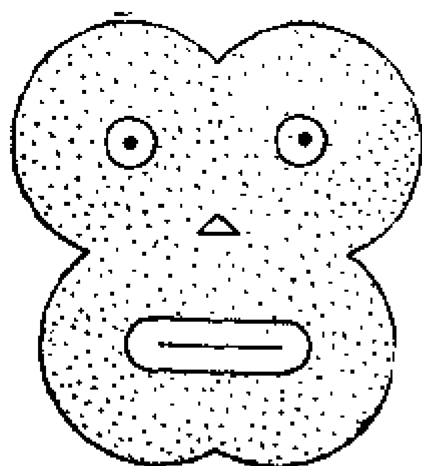


图 9.11.2.1. “爪哇猿人”.

$F = \{\text{二}\}$

$G = B\{F, 2.5\text{mm}\}$

$H = B\{G, 10\text{mm}\}$

▨ $= H \backslash G$

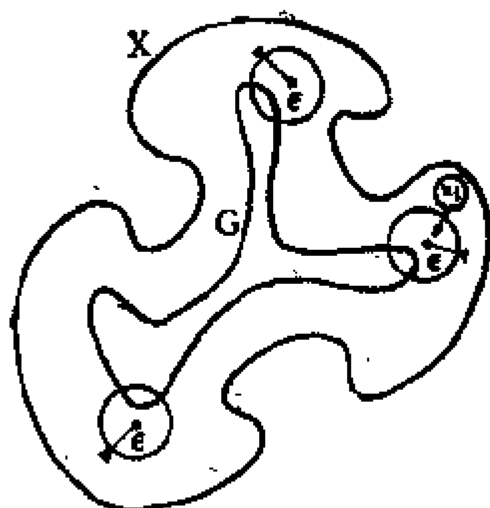


图 9.11.2.2.

是指对任意的 $\varepsilon > 0$，总存在这个空间的由直径 ε 的集合构成的有限覆盖. 假定当 $\varepsilon > 0$ 时，X 有一个由球 $B(x_i, \varepsilon)$ 构成的有限覆盖：

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon),$$

再把 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 的子集的集合记为 $\mathscr{K}_0$，则 $\mathscr{K}_0 \subset \mathscr{K}$. 因 $\# \mathscr{K}_0 = 2^n < \infty$，只要证明 $\mathscr{K} = \bigcup_{K \in \mathscr{K}_0} B_\delta(K, \varepsilon)$ 就能得出 $\mathscr{K}$ 的准紧性. 对任意的 $G \in \mathscr{K}$ 取 $F = \{x_i : d(x_i, G) \leqslant \varepsilon\}$. 从 F 的构造，可得

$$F \subset B(G, \varepsilon),$$

但由

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$$

可见 $\forall y \in G \exists x_i | y \in B(x_i, \varepsilon)$，因此 $x_i \in F$，$G \subset B(F, \varepsilon)$. 这样就有 $\delta(F, G) \leqslant \varepsilon$，对 $G \subset B_\delta(F, \varepsilon)$.

9.11.3 推论. 如果 X 是紧集，则有限子集在 $\mathscr{K}(X)$ 内稠密.

9.11.4 推论. 设 X 是欧氏仿射空间，则 $\mathscr{K}(X)$ 是完备的. 此外对任意的 $a \in X$，$r \in \mathbf{R}_+$；$\mathscr{K}_{a,r}(X) = \{F \in \mathscr{K}(X) : F \subset B(a,$

$r)\}$ 是紧的.

9.11.3 可从 9.11.2 的证明的最后一部分得出. 推论 9.11.4 常被称为"Blaschke 选择定理", 参见 [EN] 第 64 页. 它意味着 $\mathscr{K}_{a,r}(X)$ 的任意一个无限族总有一个附贴点. 这样就得到了 X 的某些紧子集的存在性,这将在 9.13.8 及 12.11.1 被用到.

9.11.5 命题. 对于任意的度量空间 X, 直径映射 (见 0.3) diam: $\mathscr{K}(X)\to\mathbf{R}$ 满足 Lipschitz 条件,而且其常数因子等于 2.

设 $F, G\in\mathscr{K}$, $\delta(F, G)=\varepsilon$; 设 $x, y\in F$ 使得 $d(x, y)=\operatorname{diam}(F)$, 则 $\exists z, t\in G$ 使得 $d(x, z)$, $d(y, t)\leqslant\varepsilon$. 因此

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(F)=d(x, y)&\leqslant d(x, z)+d(z, t)+d(t, y)\\&\leqslant 2\varepsilon+\operatorname{diam}(G);\end{aligned}$$

交换 F 和 G 的位置,就有 $|\operatorname{diam}(F)-\operatorname{diam}(G)|\leqslant 2\varepsilon$.

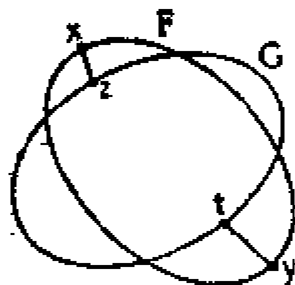


图 9.11.5.

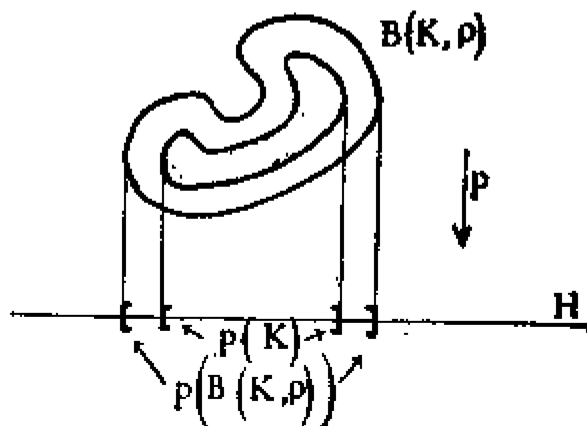


图 9.11.6.

9.11.6 命题. 设 X 是欧氏仿射空间, H 是 X 的超平面,则当 $p: X\to H$ 是 X 到 H 上的正交射影时(参看 9.2.4),映射 $\bar{p}: \mathscr{K}(X)\ni K\longmapsto p(K)\in\mathscr{K}(H)$ 满足比例常数等于 1 的 Lipschitz 条件.

注意到对任一 $K\in\mathscr{K}(X)$ 以及任意的实数 ρ, 有

$$p(B_X(K, \rho))=B_H(p(K), \rho).$$

9.11.7 从三角不等式可以推导出对任意的 ρ, σ, F, G, 有

$$\delta(B(F, \rho), B(G, \sigma))\leqslant\delta(F, G)+|\rho-\sigma|.$$

9.12 欧氏仿射空间的典范测度．体积

9.12.1 这里我们要把 2.7.4 与 8.11 结合起来． 8.11 表明欧氏向量空间 $\vec{X}$ 具有典范 Lebesgue 测度，这个测度可如下得到：任取一个向量空间的等距变换 $\mathbf{R}^n \to \vec{X}$，$\mathbf{R}^n$ 的 Lebesgue 测度的像就是所需的测度．再运用 2.7.4.3 的方法就能在欧氏仿射空间 X 上得到一个典范测度． 我们把这个测度记为 μ 或 μ_X． 从上述构造法可知，如果 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$ 是 X 的一个标准正交标架，$f: X \to \mathbf{R}$ 是一个实函数，则有

$$\int_X f\mu = \int_{\mathbf{R}^n} f\mu_0,$$

其中 μ_0 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度，并且把 f 通过由已取定的标准正交标架所导出的同构 $X \to \mathbf{R}^n$ 诱导而得的 $\mathbf{R}^n$ 上的函数仍记为 f．当然，若 $X = \mathbf{R}^n$，则 $\mu = \mu_0$．显然 μ 关于 $\mathrm{Is}(X)$ 不变，并且在差一个常数因子的条件下是唯一的(见 2.7.4.4)．

9.12.2 如果我们想知道与体积形式 $\lambda\vec{x}$ 或密度 $\delta\vec{x}$ 相联系的公式，可以利用形式或密度在微分流形上的积分理论．这里的流形就是 X，形式 λ_X 与密度 δ_X 可直接从 $\lambda\vec{x}$ 和 $\delta\vec{x}$ 得出，这是因为流形 X 的切空间可等同于 $\vec{X}$．对任意的函数 $f: X \to \mathbf{R}$，有

$$\int_X f\mu = \int_X f\lambda_X = \int_X f\delta_X.$$

9.12.3 **例．** X 里的任一仿射子空间 $Y \neq X$ 都是零测度的．

如果 X 和 X' 是有相同维数 n 的欧氏仿射空间，$f: X \to X'$ 是比值为 k 的相似变换(见 9.5)，那么像测度是 $f(\mu_X) = k^n\mu_{X'}$．

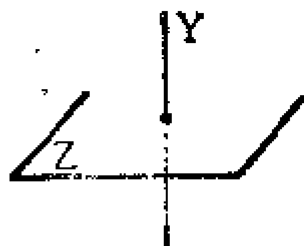


图 9.12.3.

设 Y 和 Z 是 X 的互补正交仿射子空间，则测度 μ_X 是测度 μ_Y 与 μ_Z 的积：$\mu_X=\mu_Y\otimes\mu_Z$。在这种情形里还能应用 Fubini 定理(见 0.6)。

9.12.4 体积

9.12.4.1 定义. 设 K 是 X 的紧集，χ_K 是 K 的特征函数(见 0.6)，积分 $\int_X \chi_K\mu$ 被称为 K 的体积，记为 $\mathfrak{L}(K)$。当 $\dim X=1$ (或 2) 时，称为长度(或面积)。

这些体积与面积就是我们在日常生活或物理中遇到的体积与面积。在这里我们只计算超平行六面体和单形的体积。至于"常见立体"(包括球)的体积，请读者参看 9.12.4.7，9.12.4.8 及 12.12.20.

9.12.4.2 由 $\{x_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$ 作出的超平行六面体是指

$$P=\left\{x_0+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{x_0x_i};\ \lambda_i\in[0,1],\quad i=1,\cdots,n\right\};$$

由这些点作出的单形是指

$$S=\left\{\sum_{i=0}^{n}\lambda_i x_i:\ \sum_{i=0}^{n}\lambda_i=1,\ \lambda_i\geqslant 0\quad\forall i=0,1,\cdots,n\right\}.$$

则有以下公式

9.12.4.3 $\boxed{\mathfrak{L}(P)=\delta\breve{z}(\overrightarrow{x_0x_1},\cdots,\overrightarrow{x_0x_n}),\quad \mathfrak{L}(S)=\frac{1}{n!}\mathfrak{L}(P).}$

如果 $\{x_i\}$ 不是仿射标架，则第一个公式可从 9.12.3 得出。否则，$\{x_i\}$ 确定一个线性同构 $f:X\to\mathbf{R}^n$ (一般地说这不是等距映射)，而且根据 2.4.7.3 及 8.11，像测度 $f(\mu)$ 等于

$$f(\mu)=\delta\breve{z}(\overrightarrow{x_0x_1},\cdots,\overrightarrow{x_0x_n})\mu_0,$$

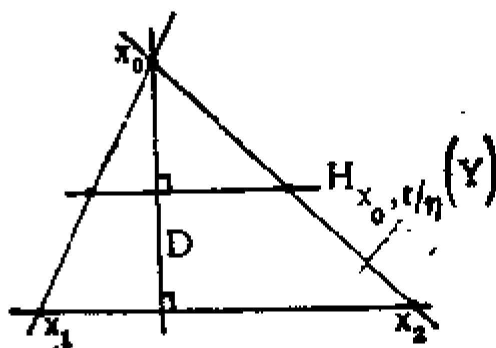
但 $f(P)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的单位立方体，它的体积等于 1 (可用 Fubini 定理证明)，这样就可得到 9.12.4.3 的第一个公式。至于第二个公式则可通过累次使用下述的中间公式而得出。不妨假设 $\{x_i\}$ 是一个标架，否则将有

$$\mathfrak{L}(S)=\mathfrak{L}(P)=0;$$

再把从 x_0 到超平面 $Y=\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ 的距离 $d(x_0, \langle x_1, \cdots, x_n\rangle)$ 记为 η，把 $\{x_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 在（$n-1$ 维）欧氏空间 H 内生成的单形 S' 的体积记为 σ，则有以下公式：

9.12.4.4
$$\mathfrak{L}(S)=\frac{1}{n}\eta\sigma,$$

当 $n=2$ 时，这个公式断定三角形的面积等于它的高与对边的长的乘积之半；当 $n=3$ 时，它断定四面体的体积等于它的高与对面面积的乘积的三分之一。



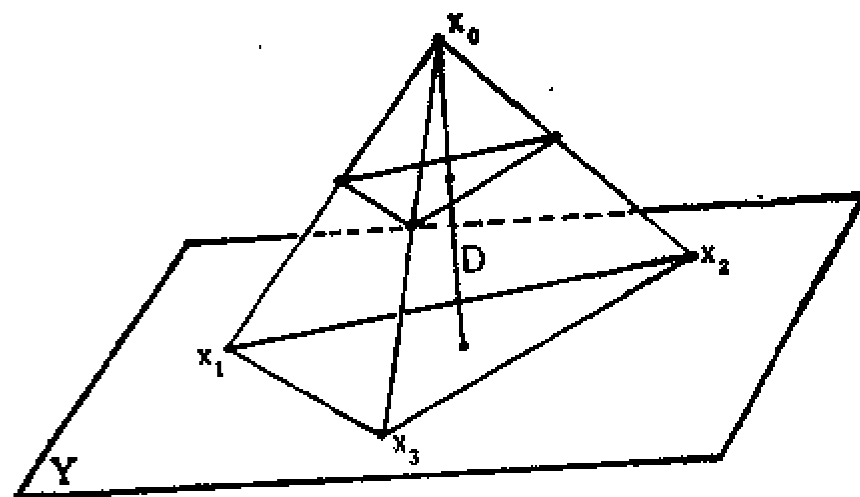


图 9.12.4.4.

为了证明公式 9.12.4.4，把过 x_0 正交于 Y 的直线记为 D，把使 D 与 $\mathbf{R}$ 等距的参数记为 t，使得在 $D\cap Y$ 处 $t=\eta$，在 x_0 处 $t=0$，由 9.12.3 可得 $\mathfrak{L}(S)=\int_0^\eta \sigma(t)dt$，其中的 $\sigma(t)$ 指单形 $H_{x_0,t/\eta}(S')$ 的体积，这个单形由 S' 通过以 x_0 为中心、比值为 t/η 的位似变换而得到，其体积在欧氏空间 $H_{x_0,t/\eta}(Y)$ 内计算．但根据

9.12.3 有 $\sigma(t)=(t/\eta)^{n-1}\sigma$. 因此

$$\mathfrak{L}(S)=\int_0^{\eta}\frac{t^{n-1}}{\eta^{n-1}}\sigma dt=\frac{1}{n}\eta\sigma.$$

9.12.4.5 注. 利用积分理论计算超平行六面体或单形的体积似乎有点小题大作。应用初等理论计算体积可参看 12.2.5。

也可使用单形 S 各边的长度 $d_{ij}=x_ix_j$ 来计算 $\mathfrak{L}(S)$，只要联合运用 8.11.6，9.7.3.2 及 9.12.4.3 就能得到所需结果.

9.12.4.6 球的体积. 对任意的 $a\in X$ 及 $r\in\mathbf{R}_+$，有以下公式:

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathfrak{L}(B_{2d}(a,r))=\frac{\pi^d}{d!}r^{2d},\\&\mathfrak{L}(B_{2d+1}(a,r))=\frac{2^{d+1}\pi^d}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2d+1)}r^{2d+1}.\end{aligned}}$$

其中的下标是指 X 的维数.由 9.12.3 可以知道只需在标准空间 $\mathbf{R}^n$ 内计算 $\mathfrak{L}(B_n(0,1))$。这种经典计算可用多种方法实行(参看 [B-G] 第 227 至 229 页以及练习 6.10.9)，计算结果就是上面式子中用 $r=1$ 代入所得的值. 由于今后常常要用到 $\mathfrak{L}(B_n(0,1))$，我们令

9.12.4.7 $\boxed{\beta(n)=\mathfrak{L}(B_n(0,1)).}$

9.12.4.8 现在我们可以给出 $n-1$ 维球面 $S_n(0,1)$ 的体积了(参看 9.12.7，12.10.8 以及 [B-G] 第 226 页以后)，并把 $\mathbf{R}^n$ 的 $n-1$ 维单位球面 S^{n-1} 的体积记为 $\alpha(n)$. 我们首先有

$$\boxed{\alpha(n)=n\beta(n)}\quad 对任意的 n.$$

因此

$$\boxed{\begin{aligned}&\alpha(2d)=\frac{2\pi^d}{(d-1)!},\\&\alpha(2d+1)=\frac{2^{d+1}\pi^d}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2d-1)}.\end{aligned}}$$

9.12.4.9 正交射影. 设 H,H' 是 X 的两个超平面，

$$\alpha=\overline{(\vec{H})^{\perp},(\vec{H'})^{\perp}}\in[0,\pi/2],$$

设 $p:H'\to H$ 是正交射影 $p:X\to H$ 在 H' 上的限制，那么对于在 H 和 H' 里的体积以及对于 H' 的任一紧子集 K，总有

$$\mathfrak{L}_H(p(K)) = \cos\alpha\cdot\mathfrak{L}_{H'}(K).$$

为了看出这一等式，只需在 H' 内取一个标准正交标架使得其中的 $n-1$ 个向量包含在 $\vec{H}\cap\vec{H}'$ 内.

9.12.5 体积与 Hausdorff 距离

即使在紧子集上也不能以为体积映射 $\mathfrak{L}:\mathscr{K}\to\mathbf{R}$ 就是很简单的映射. 举例来说,存在 $\mathbf{R}^2$ 的紧子集 K,它的边界 $Fr(K)$ 不仅有面积 $\mathfrak{L}(Fr(K))\neq 0$，而且在每个点上都有面积；请在 [G-O] 的第 135 页找到这样的例子. 函数 $\mathfrak{L}:\mathscr{K}\to\mathbf{R}$ 当然不是连续的，否则由有限集的体积等于 0 可得出所有紧子集的体积都将等于 0 (参见 9.11.3). 不过

9.12.5.1 命题. $\mathfrak{L}:\mathscr{K}\to R$ 是上半连续的.

在 $\mathscr{K}$ 内设 $F=\lim\limits_{n\to\infty}F_n$，则 $\limsup\limits_{n\to\infty}\chi_{F_n}\leqslant\chi_F$. 事实上设 $x\in X\backslash F$，那么存在 n_0 使得 $\delta(F,F_n)\leqslant d(x,F)\forall n\geqslant n_0$. 于是

$$\chi_{F_n}(x)=0\quad\forall n\geqslant n_0.$$

9.12.5.2 附注. 反之，在 12.9.3.4 将看到限制在凸紧集时 $\mathfrak{L}$ 是连续的.

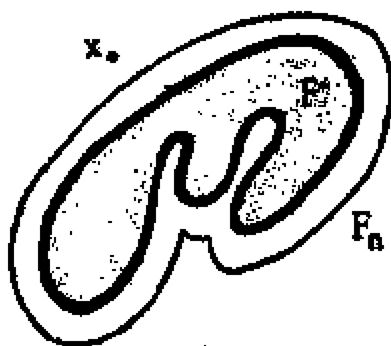


图 9.12.5.1.

9.12.6 重心. 设 K 是欧氏仿射空间 X 的紧子集，而且有非空内部：$\mathring{K}\neq\emptyset$，设 $g=\operatorname{cent}'(K)$ 是它的重心 (参看 2.7.5.2)，则 9.7.6.1 可推广为(这里把所有的 λ_i 取为 1)

9.12.6.1 $\forall x\in X:\int_{a\in X}\chi_K xa^2\mu=\int_{a\in X}\chi_K ga^2\mu+\mathfrak{L}(K)xg^2.$

作为证明只须写下以下等式：

$$xa^2 = xg^2 + 2(\overrightarrow{xg}|\overrightarrow{ga}) + ga^2.$$

如果取任意的 $\lambda_i \geq 0$，9.7.6.1 的公式推广时要在 K 上取一个任意的正测度。如果 K 的总质量非零，就可用以下的向量积分定义 K 关于 θ 的重心 g：

$$g = x + \frac{\int_{a\in K} \overrightarrow{xa}\theta}{\int_{a\in K} \theta},$$

它与 $x \in K$ 无关。这样就有公式

9.12.6.2 $\forall x \in X$: $\int_{a\in K} xa^2\theta = \int_{a\in K} ga^2\theta + \left(\int_{a\in K} \theta\right) xg^2.$

9.12.6.3 附注. 在大自然中常常会遇到测度 θ，例如对于欧氏平面或 3 维欧氏仿射空间的曲线和曲面，我们使用它们的典范测度，参看 [B-G] 第 221 页。

公式 9.12.6.1 及 9.12.6.2 表明函数

$$x \longmapsto \int_{a\in K} xa^2\theta$$

在 g、并且仅仅在 g 达到极小。在力学上可用惯量矩解释这一结果：这个极小性意味着如果你想用最小的力气使一个物体绕一点转动，那就应该把这一点取在 g 点。这是有很大实际意义的原理。

在体积与重心间的一个漂亮的关系请参看 12.12.20.9。关于计算面积的力学方法请参看 [GK] 第 72 页以后。

9.12.7 k 维体积. 如果 C 是 $\mathbf{R}^3$ 的曲线，S^2 是单位球面，那么它们的体积 $\mathfrak{L}(C)$，$\mathfrak{L}(S^2)$ 都是零。但是对 C 来说合适的概念应该是 9.9 所定义的长度（至少当 C 是它的定义区间的同胚像时可以如此做），对 S^2 来说是它的面积（它等于 4π！）。可参看 18.3.7。推而广之，我们希望能定义 X 的“k 维”子集并对这些子集定义“k 维体积”(当 $k=2$ 时就是面积，$k=1$ 时就是长度)。虽然这是一个相当自然的问题，但一般说来这也是很困难的问题。不妨想一想表面的涂漆；关于这一思想的阐发，请参看 12.10.7。

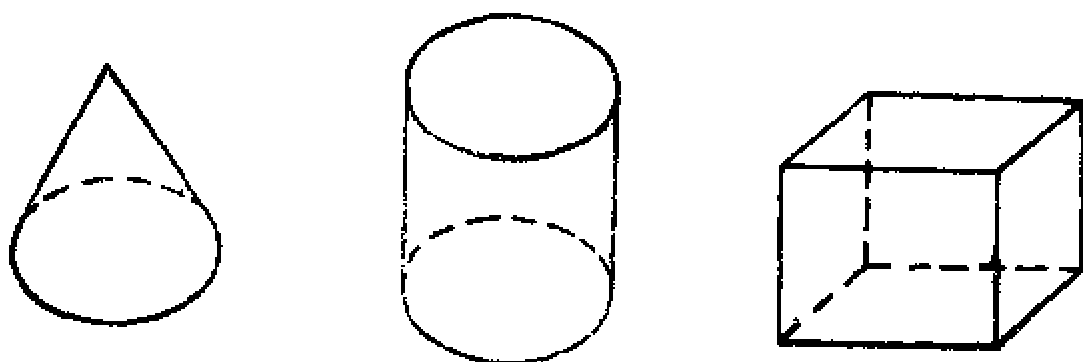


图 9.12.7.

如果涉及到的是X的C^1类微分子流形，那么这个理论不会遇到任何困难：这一类子流形容有一个典范测度，因而当它是紧集时，它有总质量．如果子流形是k维的，这个总质量就是子流形的k体积．详情可参看[B-G]第221页．反之，如果想跳出这个限制性相当强的框框（举例来说，它把立体锥面也排斥在外），也就是说允许某种程度的奇性的话，那么当$2 \leqslant k < n = \dim X$时$k$维体积的概念不再是唯一的．实际上，存在好几种有本质区别的k维体积的概念．关于这个问题的完整介绍可参看[FR]，特别是第171—174页给出了七种k维测度．当$k = n = \dim X$时，这些测度都与体积相同，当涉及到（任意维数的）紧微分子流形时，这些k维测度都与前面定义的测度相重合．

以后我们将遇到要作深入探讨的特殊情形：紧凸形的边界．它具有被简称为面积的典范$(n-1)$维体积．其构造方法如下：在12.3节先给出多胞形的面积，然后在12.10节再用多胞形逼近凸形．至于球面的情形也可参看18.3.7.

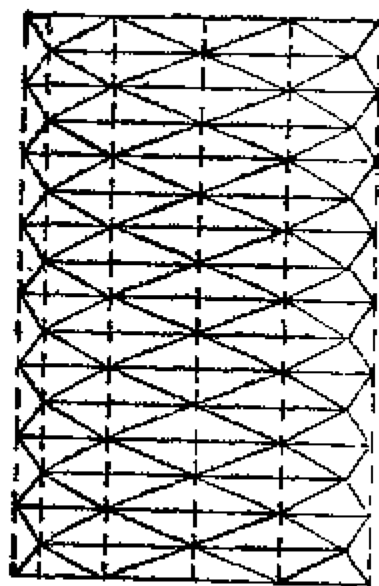


图 9.12.8.

原图取自 Berger-Gostiaux 著的《微分几何》.

为了使读者体会到当$k = 2$，$n = 3$时就会遇到困难，提一下折纸灯笼L这个经典例子也许是有用的．如果我们想采用研究曲线时使用的方法，就会想到用多边形逼近L，如图

9.12.8 所示. 不幸的是，随着水平截段的个数以及正多边形的边数趋向无穷大的方式发生变化，其面积的极限也在发生变化，它可取到介于柱面面积(真正的面积!)与无穷大之间的任一实数.

9.13 Steiner 对称

这是把X的一个紧子集变为另一个紧子集的一种运算，这个变换在证明涉及X的紧子集的某些不等式时起着主要作用：参见9.13.8，但主要用于第12章末尾. 我们在这里除了欣赏这个优美的变换外，还要研究在12章要用到的这个变换的一些性质.

9.13.1 定义. 取定一个欧氏仿射空间X，以及X的超平面H，并用σ_H表示关于H的对称(见9.2.4). 设K是X的一个紧子集，我们要定义一个被称为K关于H的 Steiner 对称集的新的紧子集，记为 $\mathrm{st}_H(K)$. 这个紧子集 $K'=\mathrm{st}_H(K)$ 由以下条件确定:

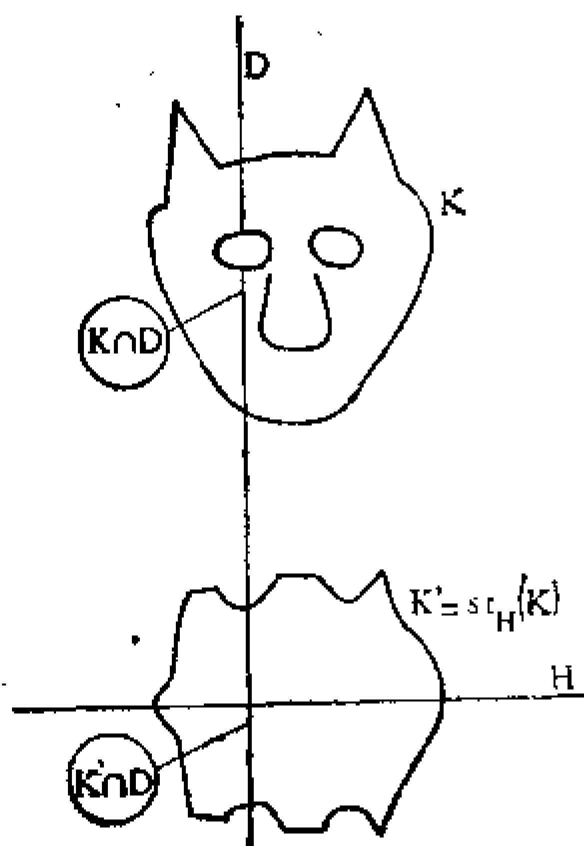


图 9.13.2

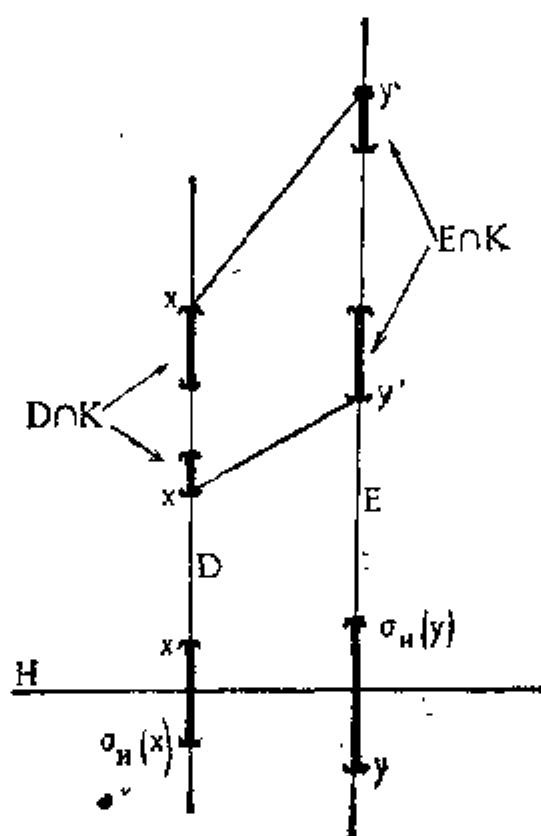


图 9.13.4

9.13.2

$$\forall\text{ 正交于}H\text{的直线}D\begin{cases}\text{如}K\cap D=\emptyset\text{，则}K'\cap D=\emptyset\text{，}\\ \text{如}K\cap D\neq\emptyset\text{，则}K'\cap D\text{是}D\text{上的线段，}\\ \text{其中点在}D\cap H\text{上，其长度等于 }K\cap D\\ \text{在}D\text{上的长。}\end{cases}$$

9.13.3 注. 请注意 $st_H: \mathscr{K}\to\mathscr{K}$ 不是连续的(关于 Hausdorff 距离)，这可从图 9.13.3 看出：当一条线段向垂直位置旋转时，它的 Steiner 对称集总是留在H上，不过变得越来越短，但当原始线段转到垂直位置时，其对称集突然变成一条垂直线段。

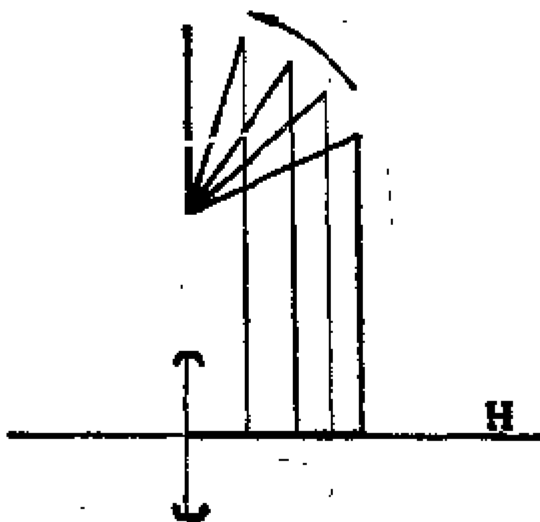


图 9.13.3.

9.13.4 命题. 对所有的 H，K，有以下性质：

(i) $\sigma_H(st_H(K))=st_H(K)$；

(ii) $\mathfrak{L}(st_H(K))=\mathfrak{L}(K)$，即对称集保持体积；

(iii) $\operatorname{diam}(st_H(K))\leqslant\operatorname{diam}(K)$，即对称集不增加直径。

性质 (i) 可从定义得出. (ii) 可从 9.12.3 以及 Fubini 定理得出. 现在设 $x, y\in st_H(K)$ 使得

$$xy=\operatorname{diam}(st_H(K)),$$

设 D，E 是过 x 或 y 的与H正交的直线. 根据 $st_H(.)$ 的定义，紧子集$D\cap K$(相应地: $E\cap K$)的端点 x' 及 x'' (相应地: y' 及 y'') 有不等式 $x'x''\geqslant x\sigma_H(x)$(相应地: $y'y''\geqslant y\sigma_H(y)$). 不过 $xy\leqslant$

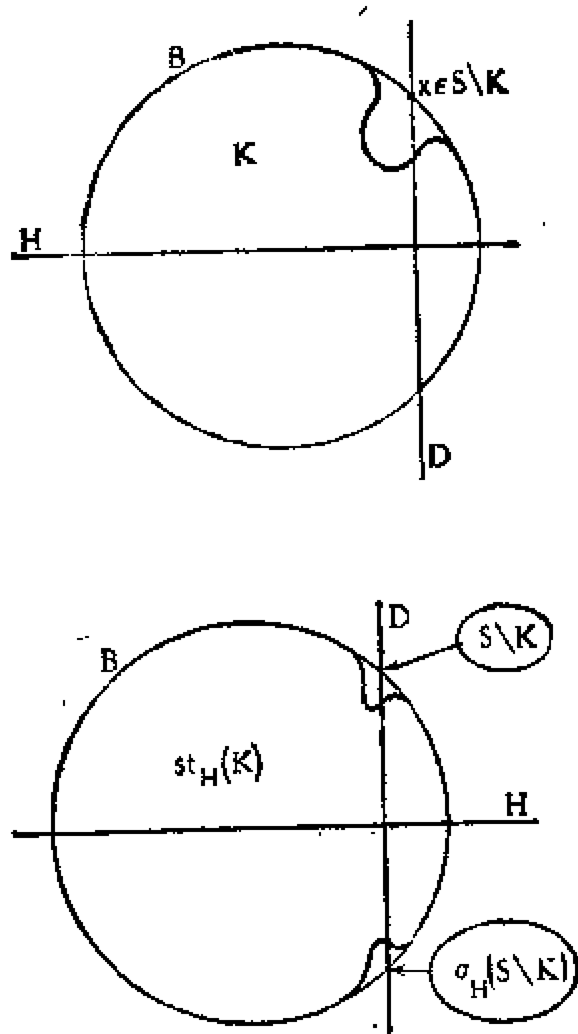


图 9.13.5.

sup $(x'y', x'y'', x''y', x''y'')$. 以下的引理可从 9.13.2 以及图 9.13.5 得出.

9.13.5 引理. 设 B 是以球面 S 为边界的球,H 是包含 B 的中心的超平面,K 是含于 B 内的紧集,则

$$\mathrm{st}_H(K)\cap[(S\backslash K)\cup(\sigma_H(S\backslash K))]=\emptyset.$$

下述定理主要用于 9.13.8 及 12.11.2. 这是在一族紧集内构造一个球的方法.

9.13.6 定理 (Blaschke 旋转定理). 设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{K}=\mathscr{K}(X)$ 的非空子集使得 $\mathscr{F}$ 对于 Hausdorff 度量是闭的并且在点 $a\in X$ 处关于 Steiner 对称集是稳定的,即 $\forall$ 超平面 $H\ni a$ 以及 $\forall K\in\mathscr{F}$, 总有 $\mathrm{st}_H(K)\in\mathscr{F}$. 那么或者 $\{a\}\in\mathscr{F}$, 或者存在 $r>0$ 使得 $B(a,r)\in\mathscr{F}$.

请注意，$\{a\} \in \mathscr{F}$ 的情形是很容易发生的。甚至当一开始没有什么点的时候，也是如此。譬如说把 9.13.3 例子中的线段族关于 Hausdorff 度量及对称集变换作封闭族，就能得到 $\{a\} \in \mathscr{F}$。

现在令 $r = \inf\{s: \exists F \in \mathscr{F} \mid B(a,s) \supset F\}$，观察(参看9.11.4) $\mathscr{F}' = K_{a,r+1}(X) \cap \mathscr{F}$。根据假设条件及 9.11.4，这是紧集，因此存在 $F \in \mathscr{F}'$ 使得 $F \subset B(a,r)$；如果 $r = 0$，则 $F = \{a\}$。我们分两步证明当 $r > 0$ 时 $F = B(a,r)$。

9.13.6.1 第一步：$F \supset S = S(a,r)$。 这里要利用 r 的定义的极小性。我们采用归谬法。设 $b \in S$，$\varepsilon > 0$，使得 $B(b,\varepsilon) \cap F = \emptyset$。我们将作出一个 $F_n \in \mathscr{F}$ 使得 $F_n \cap S = \emptyset$，这样就跟 r 的定义矛盾。首先可作一系列的 b_i，使得 $b_1 = b$，$B(b_i,\varepsilon) \cap B(b_{i+1},\varepsilon) \cap S \neq \emptyset$ 对所有的 $i = 1, 2, \cdots$ 都成立。经过有限 n 步后，就可覆盖 S：

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(b_i, \varepsilon).$$

有了这些 b_i 后，就可作出 b 与 b_i 间的垂直平分超平面 H_i，并用递推的方法定义 F_i 为：$F_1 = F$，$F_i = \mathrm{st}_{H_i}(F_{i-1})(i = 2, \cdots, n-1)$。引理 9.13.5 表明 $F_n \cap S = \emptyset$，从构造的方法可知 $F_n \in \mathscr{F}$，这正是要作的 F_n。

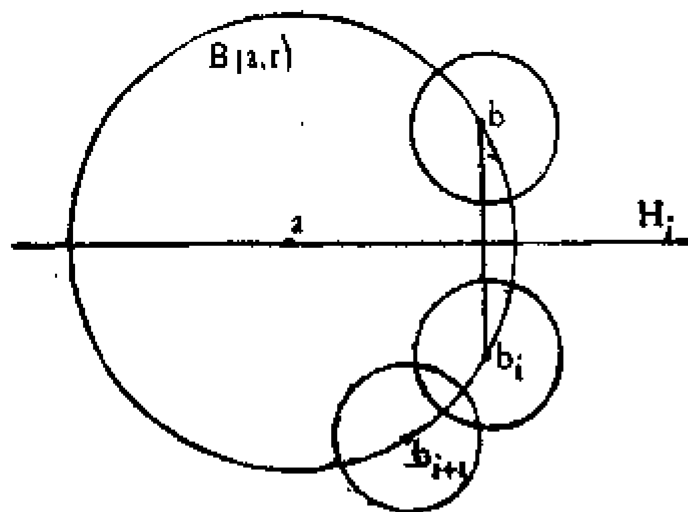


图 9.13.6.1.

9.13.6.2 第二步：$F=B(a,r)$. 我们使用归谬法. 设 $x\in B(a,r)\setminus F$. 任取一条过 x 的直线 D，设 H 是过 a 正交于 D 的超平面. 因 $F\subset B(a,r)$, $D\cap F$ 的长严格小于 $D\cap B(a,r)$ 的长，因而 $\mathrm{st}_H(F)$ 不能包含整个 S. 但是 $\mathrm{st}_H(F)\in\mathscr{F}$，根据第一步的结论应该有 $\mathrm{st}_H(F)\supset S$.

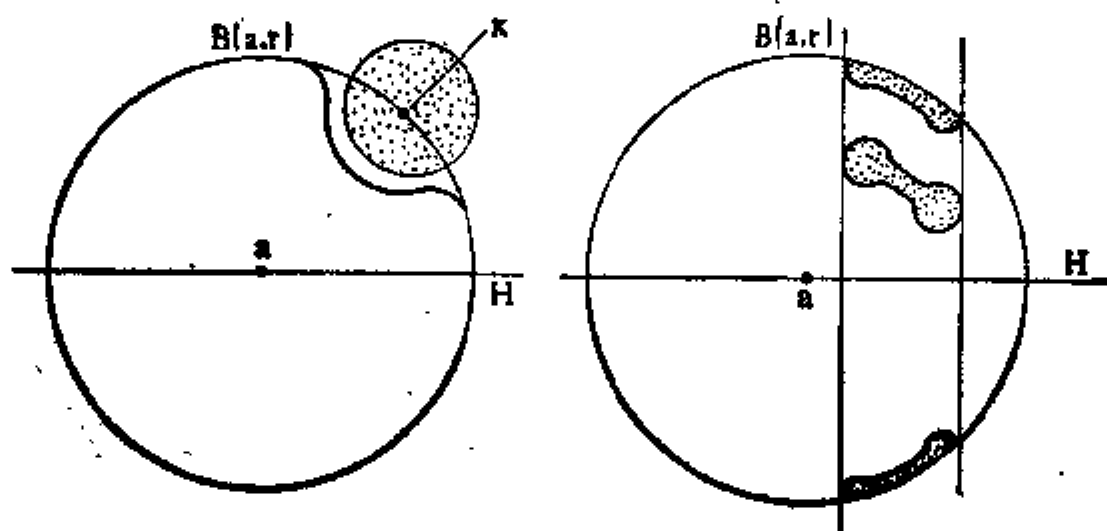


图 9.13.6.2.

9.13.7 附注. 有一个较古老的证明也许较直观些，但要用确切的数学语言写出来却十分困难：考察过 a 的有限多个线性无关超平面 H_i，它们之间的夹角是无理角，则 σ_{H_i} 在 $\mathrm{Is}_a(X)$ 内生成的群在 $\mathrm{Is}_a(X)$ 内稠密，因此 $\mathscr{F}$ 包含一个以 a 为中心的球.

9.13.8 推论 (Bieberbach 等直径不等式). 对于 n 维欧氏空间 X 的任一紧集 K，有

$$\mathcal{L}(K)\leqslant 2^{-n}\beta(n)(\mathrm{diam}\,(K))^n \quad (\text{参见 } 9.12.4.5).$$

如果 $\mathcal{L}(K)=0$ 就没有什么要证. 否则，令

$$\mathscr{F}=\{G\in\mathscr{K}:\mathcal{L}(G)\geqslant\mathcal{L}(K),\ \text{并且 } \mathrm{diam}(G)\leqslant\mathrm{diam}(K)\}.$$

根据 9.11.5, 9.13.4 以及 9.13.6 (应用到任意一个 $a\in X$)，或者有 $\{a\}\in\mathscr{F}$，或者 $\mathscr{F}$ 包含一个球 $B(a,r)$, $r>0$. 第一种情况由 $\mathcal{L}(K)>0$ 可知不可能. 因此必须有 $\mathcal{L}(B(a,r))=\beta(n)r^n\geqslant\mathcal{L}(K)$ 以及

$$\mathrm{diam}\,(B(a,r))=2r\leqslant\mathrm{diam}\,(K),$$

由于 $r > 0$，上述不等式能推导得 9.13.8。

9.13.9 注. 需要注意的是：一般说来紧集 K 不被包含在以 $\operatorname{diam}(K)/2$ 为半径的球内. 等边三角形就是一例.

当 K 是球时，等直径不等式变成等式. 反之亦对，但证明要困难得多。参看 [EN] 第 106—107 页。

关于 Steiner 对称集的应用及推广，除 12.11 外可再参看 [P-S]。

9.14 练　　习

9.14.1 把 9.2.6.5 推广到两个任意子空间的情形.

9.14.2 在一个适当选取的标架里，写出 3 维空间里以下点集的方程 $f(x, y, z) = 0$；$\{t: d(t, A) = d(t, B)\}$，其中 A, B 分别是：两条直线；一条直线与一个点；一条直线及一个平面；一个点及一个平面；两个平面. 利用 15.3 及 15.6 的符号，说明所得集合的类型. 如果把等式改成 $d(t, A) = k d(t, B)$，会得出什么结果？

9.14.3 角平分线. 设 D, D' 是平面上两条不平行直线，证明 $\{x \in X; d(x, D) = d(x, D')\}$ 由 D 和 D' 的两条角平分线组成（参见 8.7.3.2）。当 X 不再是平面时，参看 9.14.2.

9.14.4 对于欧氏仿射空间 X，试确定满足下述条件的所有 $f \in \mathrm{GA}(X)$：$f^2 = f$ 并且 f 使距离缩短，即 $f(x)f(y) \leqslant xy\ \forall x, y \in X$.

9.14.5 证明如果 X 是已定向的三维空间，那么对于以定向直线为轴的 X 的旋转，总可定义一个定向角，它能毫无歧义地刻划这个旋转（见 9.3.5）。

9.14.6 设 X 是三维空间，(a_i)，$(a'_i)(i = 1, 2, 3)$ 是 X 的六个点，使得 $a_i a_j = a'_i a'_j\ \forall i, j = 1, 2, 3$. 证明当 a_i 为仿射无关时必存在唯一的 $f \in \mathrm{Is}^+(X)$（或 $\mathrm{Is}^-(X)$），使得 $f(a_i) = a'_i\ \forall i$. 并用几何方法找出 f 的特征元素（见 9.3.5）。

9.14.7 连续螺旋运动. 设 X 是三维欧氏仿射空间，$f: \mathbf{R} \to \mathrm{Is}(X)$ 是一个映射，经适当选取标准正交标架后，存在数 k 及 h，使得 f

可写成

$$f(t):(x, y, z) \longmapsto (\cos kt \cdot x + \sin kt \cdot y,$$
$$-\sin kt \cdot x + \cos kt \cdot y, z + ht),$$

就称这样的 f 为 X 的连续螺旋运动：

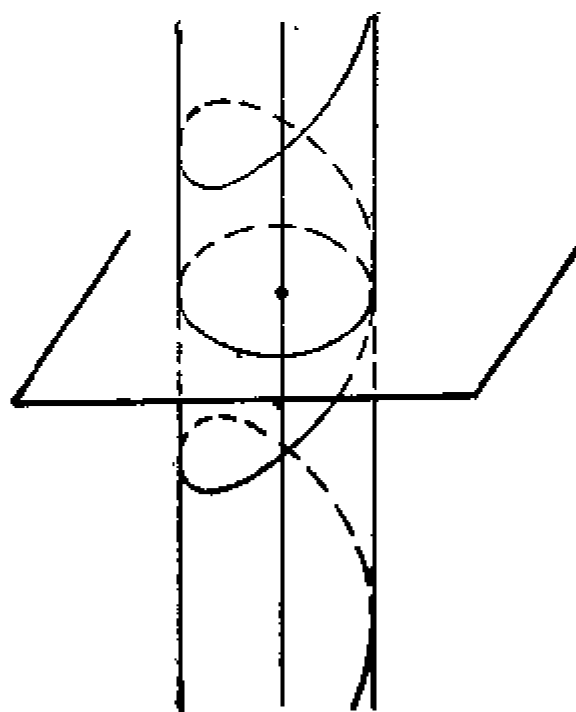


图 9.14.7.

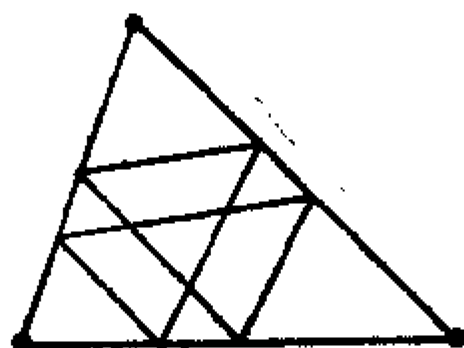


图 9.14.9.

试证对于任意一个 C^1 类映射 $g: \mathbf{R} \to \mathrm{Is}(X)$（必要时把 $\mathrm{Is}(X)$ 嵌入 $\mathrm{GA}(X)$ 以在 $\mathrm{Is}(X)$ 内定义可微性），存在连续螺旋运动 f，使得 $(g - f)'(0) = 0$. 当 g 是由 X 的一条曲线的活动三棱形所确定的映射时，请给出上述连续螺旋运动. 请参见 [BE] 第 120 页.

9.14.8 证明 9.4.2.3 的等距变换 f 绝不是 Id_X. 关于这一主题，请对 [GR] 第 179 页以后作批评性研究.

9.14.9 研究作 k 圈闭合运动的弹子轨道. 根据 k 以及多边形边数的变化进行讨论(参见 [GR] 第 276 页上画得很好的图).

9.14.10 对于顶点共圆的四边形的极小周长内接多边形的性质作完整的讨论.

9.14.11 证明长方形的弹子盘永不会是强遍历的，但总是弱遍历的. 证明等边三角形不是强遍历的.

9.14.12 研究三维空间中相似变换的结构.

9.14.13 设 $n=2$, a, a', b, b' 是四个点,其中 $a\neq b$, $a'\neq b'$. 证明在 $\mathrm{Sim}^-(X)$ 内存在唯一的 f, 使得 $f(a)=a'$, $f(b)=b'$, 并作出其中心及轴.

9.14.14 请利用 9.7.6.5 给出一个与 9.6.2 不同的方法作出 $f\in\mathrm{Sim}^+(X)$ (或 $\mathrm{Sim}^-(X)$) 使得 $f(a)=a'$, $f(b)=b'$.

9.14.15 **调和四边形.** 设 x, y, z, t 是欧氏平面上满足 $[x, y, z, t]=-1$ (见 9.6.5.2) 的四个点. 把 x, y 及 z, t 的中点分别记为 a 及 b. 证明: x, y, z, t 是共圆的; $\langle x, y\rangle$ 的极点属于 $\langle z, t\rangle$; $\langle x, y\rangle$ 是 $\langle a, z\rangle$, $\langle a, t\rangle$ 的角平分线; $az\cdot at=ax^2=ay^2$; $xy\cdot zt=xz\cdot yt+xt\cdot yz$ 以及 $az+at=bx+by$. 证明如果 u 是 $\langle x, y\rangle$ 与 $\langle z, t\rangle$ 的交点,则

$$\frac{ux}{uy}=\left(\frac{zx}{zy}\right)^2=\left(\frac{tx}{ty}\right)^2,\quad \frac{uz}{ut}=\left(\frac{xz}{xt}\right)^2=\left(\frac{yz}{yt}\right)^2.$$

请给出逆命题并加以证明. 再证反演变换 (见 10.8) 把调和四边形变成调和四边形.

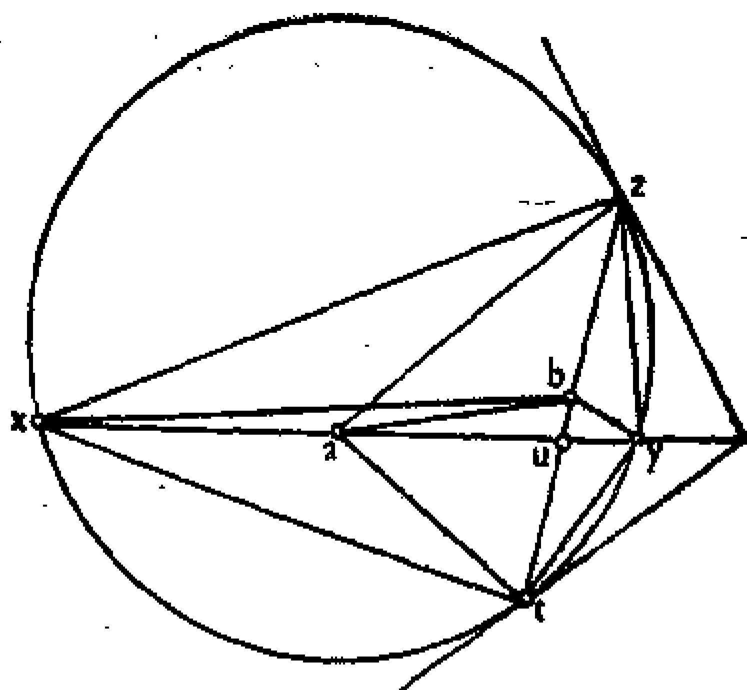


图 9.14.15.

9.14.16 求作三角形的内接正方形. 见下图.

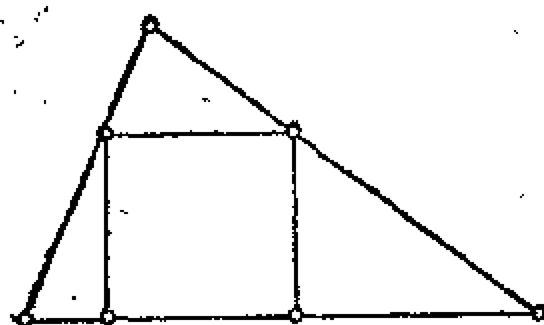


图 9.14.16.

9.14.17 按照两个圆周的相对位置讨论 9.6.8.3 中的蚶线的相对位置及形状。

9.14.18 根据点 a 关于圆周的位置变化，讨论图 9.6.8.1 的蚶线的凹性(可以利用极坐标，由其中的公式可得出关于极点的凹性)。

9.14.19 设 C 和 C' 是欧氏平面 X 的两个子集，使得对任意的 α 总存在角 α 的相似变换 f，使 $f(C)=C'$。问对 C 和 C' 能说些什么？

9.14.20 除了 9.6.9.1 的映射外是否存在既是群同态又是可微分的映射 $\mathbf{R}\to \mathrm{Sim}^+_a(X)$？

9.14.21 **对数螺线.** 怎样的平面曲线才能使切线与切点到定点连线间的夹角等于常角？怎样的平面曲线才能使曲率半径与弧长成比例？对数螺线能否是它自己的法线的包络？

9.14.22 **Pascal 蚶线，Descartes 卵形线与无球差折光面.** 设 u, v 是两个点，S 是以 $\langle u, v\rangle$ 为轴的迴转曲面. 证明要使作为满足 Descartes 法则 $\frac{\sin i}{\sin r}=$ 常数的折光面 S 关于 u 和 v 是完全无球差的，就必须使 S 的点 x 满足形如 $a\cdot xu+b\cdot xv=c(a, b, c\in\mathbf{R})$ 的关系式. 我们把形如 $\{x\in X: a\cdot xu+b\cdot xv=c\}(u, v\in X, a, b, c\in \mathbf{R}$ 已给)的平面曲线称为 Descartes 卵形线. 证明 Pascal 蚶线是 Descartes 卵形线. 研究 Descartes 卵形线的形状. 如要知道更多的细节，请参看 [BP].

9.14.23 **Cayley-Menger 行列式.** 证明 Γ 总是满足以下关系式的：

$$\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_{k-1})\Gamma(x_0, x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_k)=$$

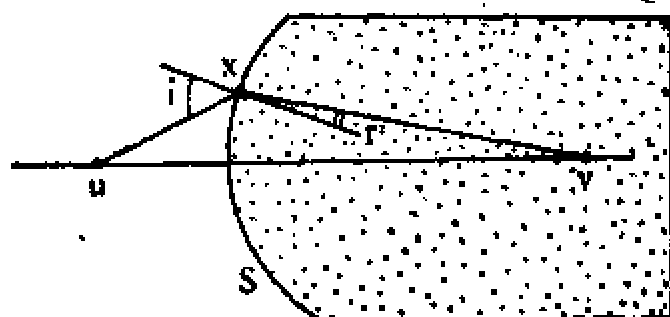


图 9.14.22.

$$= M_{ik}^{i} + \Gamma(x_0, x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{k-1})\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_k),$$

其中 M_{ik} 是 Γ 的元素 d_{ik}^i 的余子式．从这个关系式推导出：如果 $\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_k) \neq 0$ 且符号是 $(-1)^{k+1}$，则所有的 $\Gamma(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h})(i_1 < \cdots < i_h, h = 2, \cdots, k)$ 是非零的而且符号是 $(-1)^h$．证明存在 X 的点 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,k}$ 满足 $x_ix_j = d_{ij}$ $\forall i, j = 0, 1, \cdots, k$ 的充要条件是对于所有的 h 以及 (x_i) 的所有含 h 个元素的子族，相伴的 Γ 或等于 0 或者符号是 $(-1)^h$．

9.14.24 给出一个使 9.13.6 中不可能有 $\{a\} \in \mathscr{F}$ 的简单判则．

9.14.25 **Sylvester 定理．** 设 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ 是实仿射平面内不在同一直线上的 n 个点．证明存在一条直线恰好只含其中两个点(可赋予这个平面以欧氏结构，再考虑 $d(x_i, \langle x_j, x_k\rangle)$ 的下界，其中 $i, j, k = 1, \cdots, n$ 且互不相同)．

9.14.26 找出 $f \in \mathrm{Is}(X)$ 以及 X 的一个有界子集 A，使得 $f(A) \subset A$，$f(A) \neq A$．证明如果 A 是紧的，则 $f(A) \subset A$ 可导致 $f(A) = A$．

9.14.27 试证 $\mathrm{Is}_A(X) \subset \mathrm{Is}_{\bar{A}}(X)$，并给出使这两个群不相同的例．

9.14.28 给出无界或有限子集 A，使得 $\mathrm{Is}_A(X)$ 成为紧集或有限集．

9.14.29 **平面的格．** $\mathbf{R}^2$ 的格就是形如 $\mathbf{Z}x + \mathbf{Z}y$ 的子集，其中 x, y 线性无关（见 1.7.5.2）；证明 $\mathbf{R}^2$ 的任意一个格 Λ 都相似于唯一的形如 $\mathbf{Z}u + \mathbf{Z}v$ 的格，其中 $u = (1, 0)$，v 属于下述区域：

$$\mathscr{D} = \left\{(a, b): 0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2},\ a^2 + b^2 \geqslant 1,\ b > 0\right\}.$$

按照 v 在 $\mathscr{D}$ 内的位置对 $\mathrm{Is}_\Lambda(\mathbf{R}^2)$ 作讨论。 证明如果 $\mathbf{R}^2$ 的两个格 Λ, Λ' 使得

$$\#\{x\in\Lambda:\|x\|=r\}=\#\{x\in\Lambda':\|x\|=r\}\quad\forall r\in\mathbf{R}_+,$$

则它们必定是等距的(对任意维数的格来说,后一结果是错的. 参见 [SE2] 第 177 页第 4 至第 8 行).

9.14.30 内蕴度量. 证明 9.9.7.1. 设 (M, d) 是如下的度量空间: 其中 d 是由 X 在子集 M 上诱导的距离, M 是以 O 为顶点的锥面,它包含平面 P 上由 9.9.3.3 定义的曲线, 其中 P 不包含 O 点. 试研究度量 $\bar{d}$. 用一个例子证明如果 (M, d) 使得 $\bar{d}$ 仍是一个距离,那么 $(M, \bar{d})$ 的拓扑仍然可能异于 (M, d) 的拓扑.

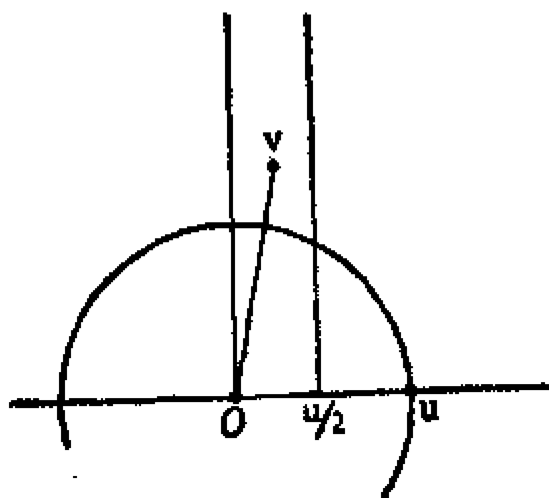


图 9.14.29.

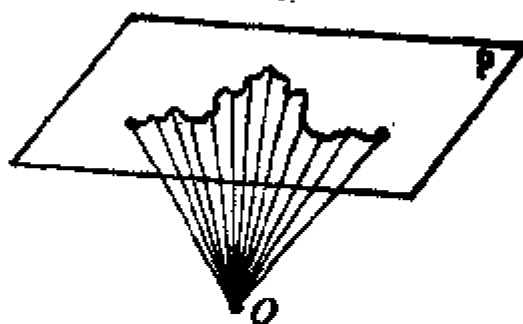


图 9.14.30.

9.14.31 Menger 曲率. 设 f 是欧氏空间的 C^2 类正则曲线, x, y, z 是 f 上三个不同点,置

$$K(x, y, z) = \frac{\sqrt{(xy+yz+zx)(xy+yz-zx)(xy-yz+zx)(-xy+yz+zx)}}{xy\cdot yz\cdot zx}$$

(见 10.3.4).

证明当 y, z 趋向 f 的点 x 时, $K(x, y, z)$ 的极限就是 f 在 x 点的微分几何意义下的曲率 (参看 [B-G], 8.4). 给出 C^1 类正则曲线的例子,使得 $K(x, y, z)$ 当 y, z 趋于 x 时无极限或趋向无穷.

9.14.32 (这个练习是选做题,因为作者和出版者都不能负担其费

用)请到巴塞尔大教堂去，观察一下刻在 Bernouilli 墓上的螺线，确定其是否是对数螺线。

9.14.33 设 C 是欧氏平面的严格凸的 C^1 类曲线。 证明对任意的 n 至少存在一个内接于 C 的 n 边光线多边形。

9.14.34 内摆线与外摆线(或"螺旋虫"玩具)。

9.14.34.1 定义. 设在欧氏平面上有两个圆周 Γ 和 Γ'，它们的半径之比是有理数，在 Γ' 上取定一点，使 Γ' 沿着 Γ 作无滑动滚动时，这个定点描出的轨迹 C 就称为摆线. 当 Γ' 在 Γ 内部时，称为内摆线，当 Γ' 在 Γ 外部时，称为外摆线. 根据此有理数的取值研究 C 的形状。问 C 的尖点数是多少？

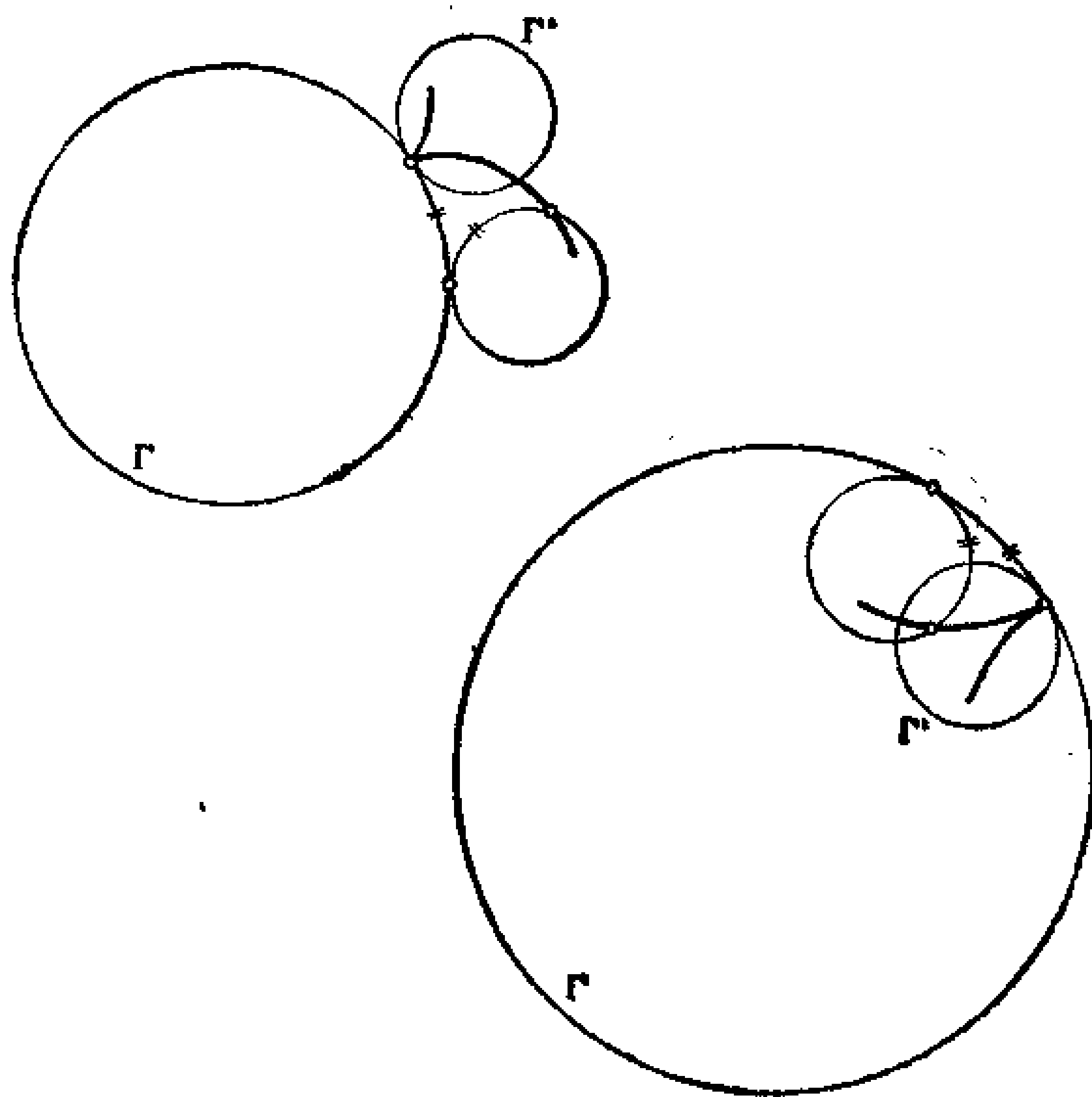


图 9.14.34.1.

9.14.34.2 等价定义. 设 Σ 是 $\mathbf{R}^2=\mathbf{C}$ 的单位圆周，r 是非零有理数. 试证当 θ 跑遍 $\mathbf{R}$ 时，连接点 $e^{i\theta}$ 和 $e^{ir\theta}$ 的直线 $D(\theta)$ 的包络就是外摆线或内摆线. 随着 r 的变化讨论它的性质（内摆线？外摆线？尖点数等…）. 这样能否得到所有的内摆线及外摆线？

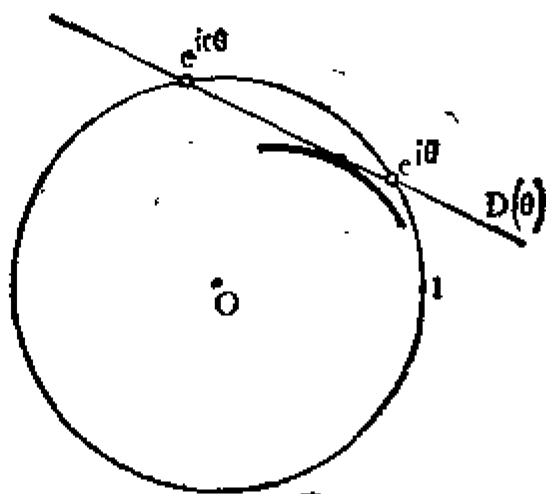


图 9.14.34.2.

9.14.34.3 例

A）当 Γ' 的半径是 Γ 半径之半并且 Γ' 在 Γ 内滚动时可得到怎样的曲线？(Lahire 齿轮机构).

B）试证当 Γ' 与 Γ 有相同半径并且在外部滚动时，就可得到一种 Pascal 蚶线，称为心脏线. 设 a 是平面上一点，D 是平面上

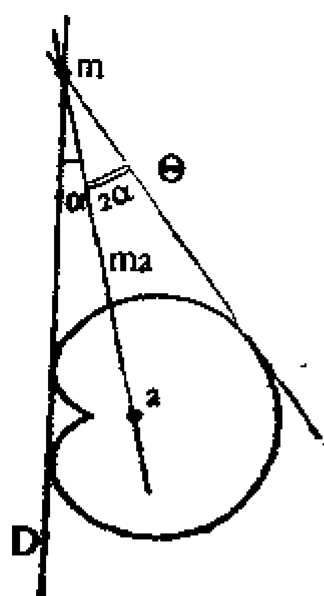
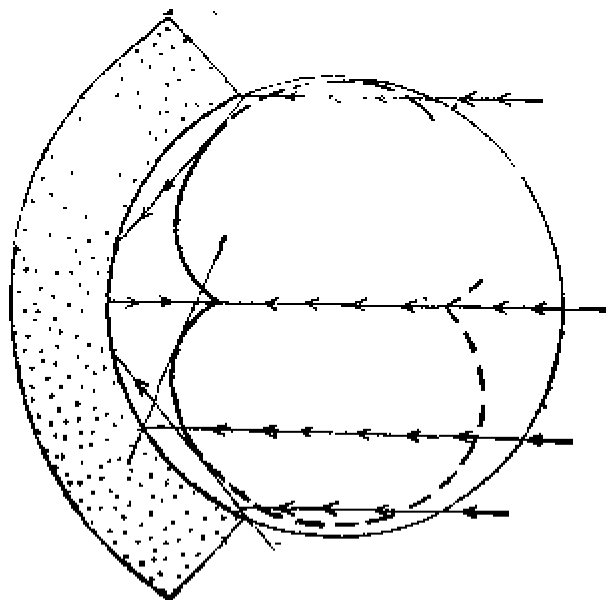


图 9.14.34.3.B)


图 9.14.34.3.C)

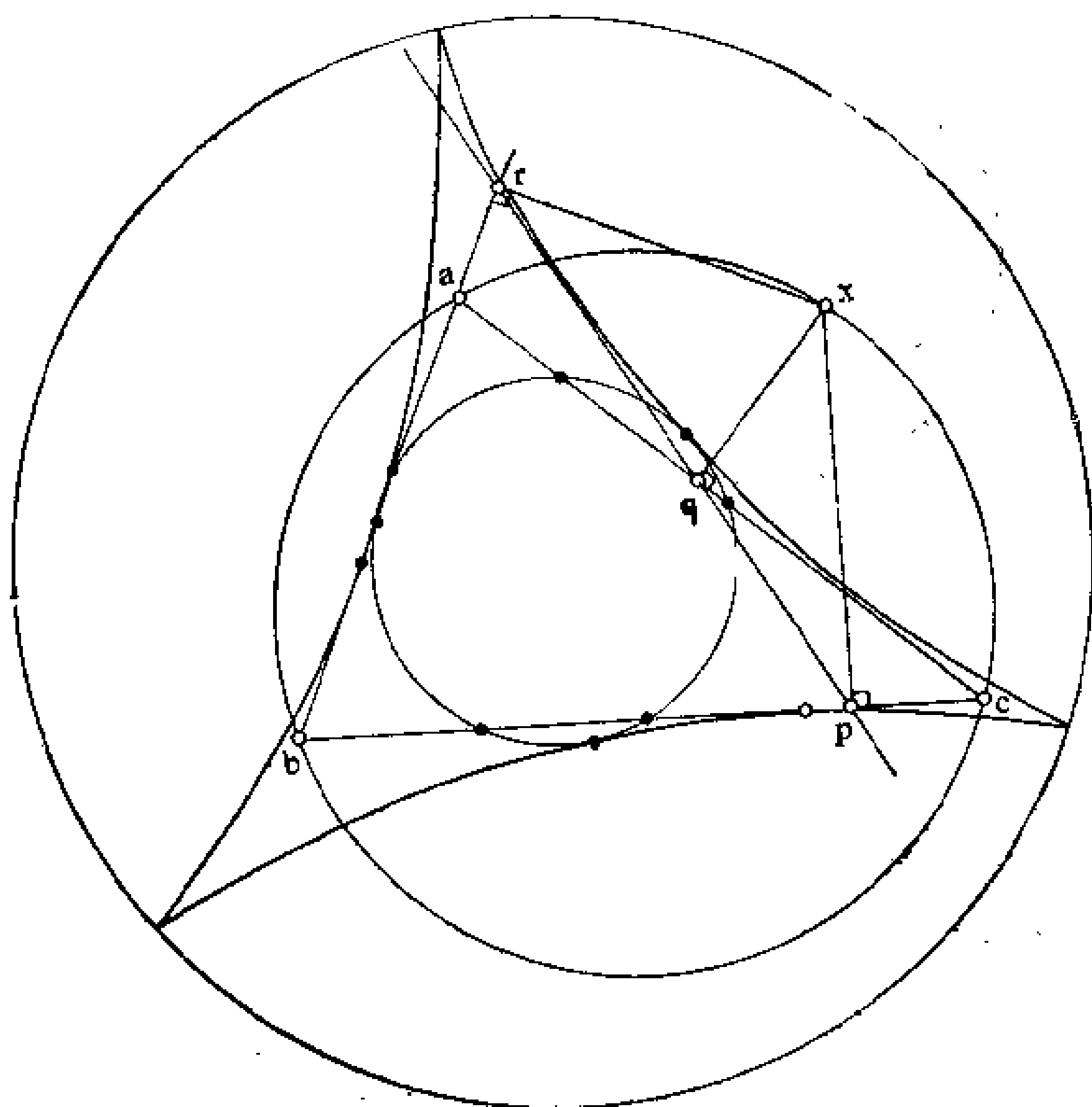


图 9.14.34.3.D)

一直线，$a \notin D$. 试证当 m 跑遍 D 时，由条件 $m \in \Theta$ 以及 $\widehat{D\Theta} = 3\,\widehat{ma, D}$ 所确定的直线 Θ 可包络出一条心脏线. 称 a 为这条心脏线的中心。

C) 证明平面球镜的焦散面（即与轴平行的光线的反射线的包络）是有两个尖点的外摆线的一段（称为肾脏线）。

D) 设 $\mathscr{C}$ 是一个三角形，当一个点在 $\mathscr{C}$ 的外接圆上移动时，试证 Simson 直线的包络（参看 10.4.5.5 及 10.9.7.1）是有三个尖点的内摆线，它与 $\mathscr{C}$ 的九点圆相切于三点（参见 10.11.3）。请指出其切点，

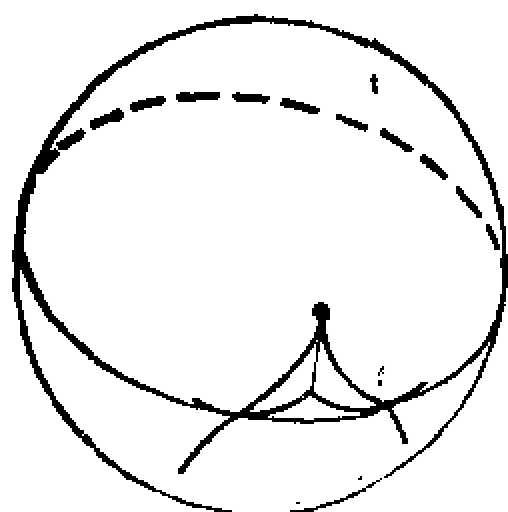


图 9.14.34.3.E)

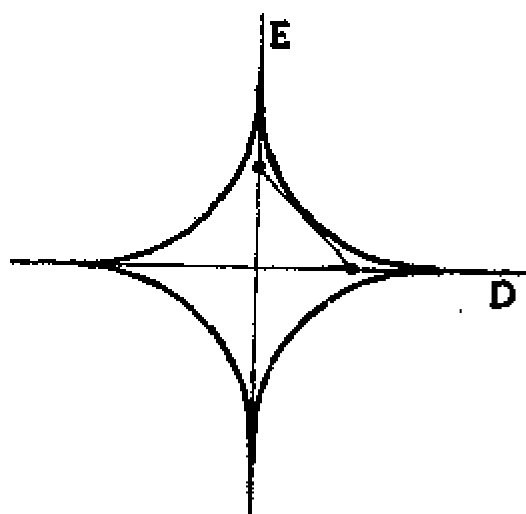


图 9.14.34.3.F)

E) 证明具有竖直轴的球面螺旋线(即球面 S 上的曲线,其切线与轴夹成常角 α) 的水平投影当 α 适当选取时是外摆线.

F) 请证明两个端点在两条正交直线上移动的定长线段的包络是有四个尖点的内摆线(称为星形线).

9.14.34.4 性质. 证明内摆线或外摆线的渐屈线(即法线的包络)相似于原曲线. 试证弧长 s (从某一合适的起点开始度量)与内、外摆线的曲率 K 之间满足以下关系式:

$$as^2 + bK^{-2} = c \quad (a, b, c \text{ 是常数})$$

(这就是内蕴方程,参看 [B-G] 第 323 页). 反之, 满足上述关系式的曲线是怎样的? 计算内、外摆线的总长.

9.14.34.5 心脏线与 Morley 定理. 设 $\mathscr{C}$ 是已知三角形. 证明与这三角形三边相切的心脏线的中心构成 27 条直线,它们共有三个方向,相互夹角为 $2\pi/3$ (请利用 9.14.34.3 B 及 10.13.18). 再证明 $\mathscr{C}$ 的 Morley 三角形 $\{p, q, r\}$ 的三条边 (参看 10.3.10) 落在其中三条直线上(请注意 Morley 三角形的顶点就是下述内切心脏线的中心: 它的两条切线就是 $\mathscr{C}$ 的两条边;第三条双重切线是 $\mathscr{C}$ 的第三条边. 参见 10.13.23).

9.14.34.6 关于内、外摆线的进一步研究可参看 [LM1]. 也可参看 [ZR], 这是关于平面曲线以及它们与力学、光学、电学之间的联系的十分有趣的参考书, 尤其是第 XXI 章涉及外摆线与齿轮

的关系。最后，关于摆线的解析表述可参看 [LF-AR] 第 413 至 415 页，关于 Wankel 内燃机(见 12.10.5)缸壁形状的确定可参看第 433 至 435 页。

9.14.35 设 a, b, c, d 是欧氏平面的四点，其中 b, c, d 在一直线上。证明有以下的 Stewart 关系式：

$$(ab)^2\overline{cd}+(ac)^2\overline{db}+(ad)^2\overline{bc}+\overline{bc}\cdot\overline{cd}\cdot\overline{db}=0,$$

其中涉及的是 b, c, d 所在直线上相对于任取的单位的代数度量。

9.14.36 设 X 是仿射空间，G 是 $\mathrm{Is}(X)$ 的有限子群。试证存在 X 的子集 A 使得 $G=\mathrm{Is}_A(X)$。由此可得对任意的抽象有限群 G，总存在一个欧氏仿射空间 X 及 X 的子集 B，使得 G 同构于 $\mathrm{Is}_B(X)$。

9.14.37 设 φ 是欧氏平面 E 到它自身的"保持距离 1"的映射，即

$$d(\varphi(x),\ \varphi(y))=1\quad \forall x,\ y\in E\,|\,d(x,y)=1.$$

请证明 φ 是等度量变换(先证 φ 保持距离 $\sqrt{3}$，然后利用 $\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\cdot\sqrt{3}$ 在 $\mathbf{R}$ 内稠密这一性质)。参看 [M-P] 第 152 页。

9.14.38 证明要使三维欧氏空间 E 的三条直线 D, E, F 有公垂线(见 9.2.6.5)的充要条件是绕这三条直线的中心对称有以下性质：

$$\sigma_D\circ\sigma_E\circ\sigma_F\quad 是一个中心对称。$$

由此推导出 Petersen-Morley 定理：设 X, Y, Z 是 E 的三条直线，X'(相应地：Y', Z')是 Y 和 Z(相应地：Z 和 X, X 和 Y)的公垂线，X''(相应地：Y'', Z'')是 X 和 X'(相应地：Y 和 Y', Z 和 Z')的公垂线。请证明三条直线 X'', Y'', Z'' 有公垂线。请参看 [LF-AR] 第 681 页及 [FL] 第 339 页的其它证法。

9.14.39 已知 $\mathbf{R}^3$ 的六个点 a_i, a_i' $(i=1,2,3)$ 使得

$$d(a_i,a_j)=d(a_i',a_j')\quad \forall i,j=1,2,3.$$

请用几何方法确定使 $f(a_i)=a_i'$ $\forall i$ 的等度量变换 f。

9.14.40 已知 $\mathbf{R}^2$ 的四个点 a, b, a', b'，作出使 $a\longmapsto a'$, $b\longmapsto b'$ 的相似变换的中心。

9.14.41 已知 $\mathbf{R}^3$ 的六个点 a_i, $a_i'(i=1,2,3)$，在什么条件下存在使 $f(a_i)=a_i'$ $\forall i$ 的相似变换？如果这些条件被满足，用几何方法作出所求相似变换 f 的中心。再推广到任意的维数。

第10章　三角形,球面及圆

三角形、多边形、四面体、圆及球面都是我们几何园地上驯养的动物。本章汇集了与它们有关的已知条件及基本结论，也收集了更深入的结果，不过这些结果的陈述或图形都是十分简单的。看来我们并不需要对这一章作介绍。读者在翻阅时会被有兴味的段落所吸引，在理解或证明需要时再回头阅读前面的部分。反正读者对这些动物已相当熟悉，我们不把重点放在它们的古典性质的证明上。可以把这一章看成第九章的图解、练习及问题的汇总。第10.12节是其它章节的引论及缘由。

> 本章考虑的空间都是欧氏仿射空间。在10.1至10.5以及10.9至10.11诸节，涉及的是平面，在10.12节，维数是3.

10.1　三角形：定义及记号

10.1.1　根据2.4.7，所谓三角形就是三个仿射无关的点。我们可把它放在由这三个点生成的仿射平面内，因此不妨假设一切都发生在一个欧氏平面X内。在10.1至10.4节都将保持这一假设。

10.1.2　对于一个取定的三角形$\mathscr{C}=\{x,y,z\}$，我们将始终使用下列记号：

$$a=yz,\ b=zx,\ c=xy \quad (\text{参见 9.1.1}),$$

$$A=\overline{\overrightarrow{xy},\overrightarrow{xz}},\ B=\overline{\overrightarrow{yx},\overrightarrow{yz}},\ C=\overline{\overrightarrow{zy},\overrightarrow{zx}} \ (\text{参见 8.6}).$$

实数a,b,c被称为$\mathscr{C}$的边，它们所在的直线也使用同样的记号(参见2.4.7)，幸好这样做不会产生混淆。回忆一下A,B,C被称为$\mathscr{C}$的角，这是$]0,\pi[$内的实数。$\mathscr{C}$的顶点是x,y,z。

10.1.3 如果三角形的两条边相等,就称为等腰三角形．三条边相等称为等边三角形．一个角是 $\pi/2$ 的三角形称为直角三角形．三个角都在 $]0, \pi/2[$ 内的三角形称为锐角三角形，否则就是钝角三角形．

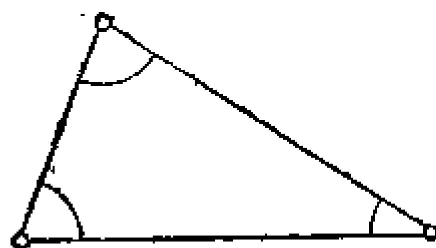


图 10.1.1.

10.1.4 通过 $\mathscr{C}$ 的顶点并与对边正交的直线称为 $\mathscr{C}$ 的高．把相应线段的长记为 h_a, h_b, h_c，也就是说

$$h_a = d(x, \langle y, z\rangle),\quad h_b = d(y, \langle z, x\rangle),\quad h_c = d(z, \langle x, y\rangle).$$

$\mathscr{C}$ 的垂直平分线就是点对 $\langle x, y\rangle$, $\langle y, z\rangle$ 或 $\langle z, x\rangle$ 的垂直平

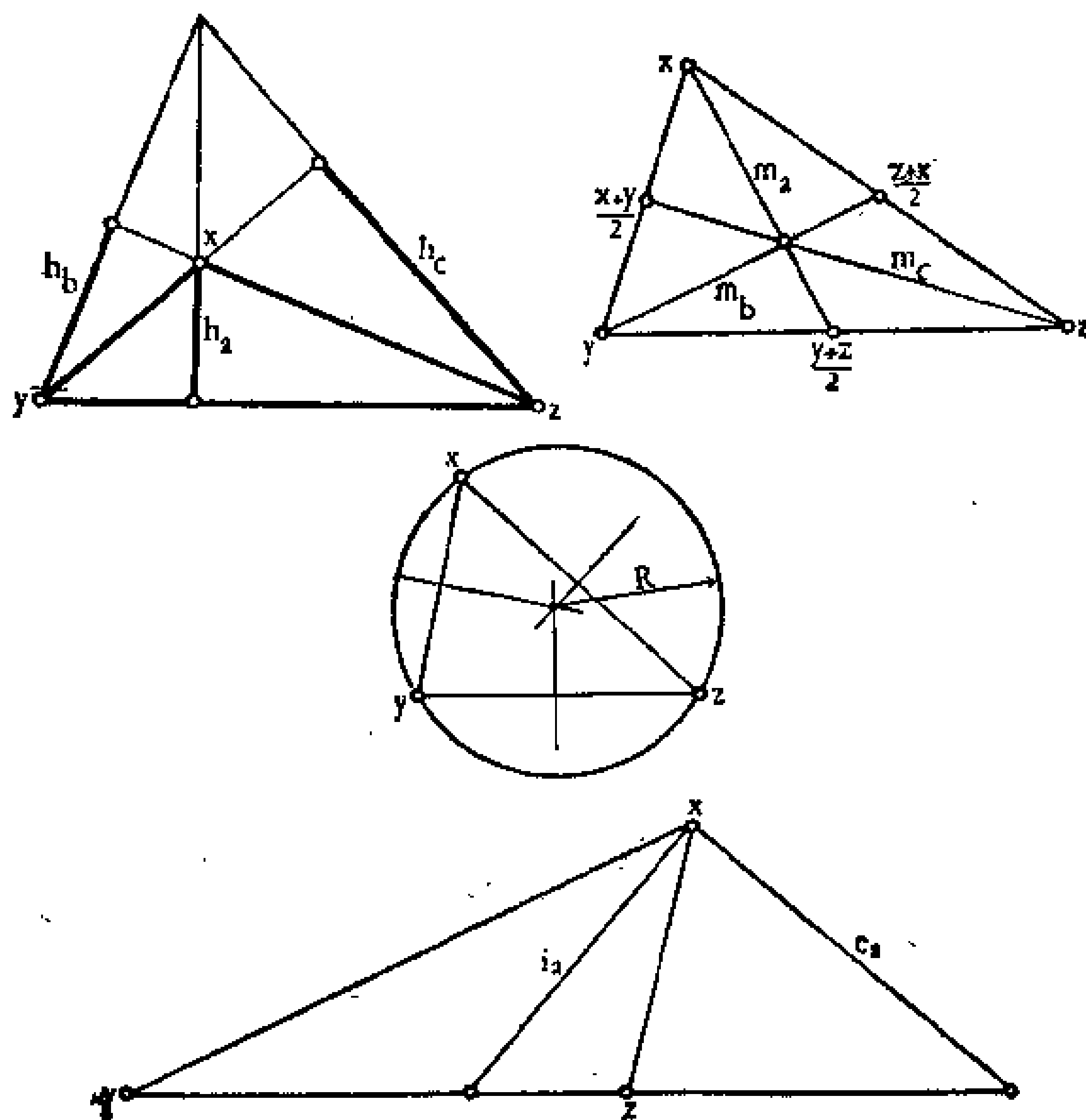


图 10.1.4.

分线(参看 9.7.5). $\mathscr{C}$ 的内角平分线就是有向射线 $\langle\overrightarrow{xy},\overrightarrow{xz}\rangle$, $\langle\overrightarrow{yx},\overrightarrow{yz}\rangle$, $\langle\overrightarrow{zx},\overrightarrow{zy}\rangle$ 的角平分线所在的直线(见 8.7.3.3). 外角平分线就是过顶点与上述直线正交的直线. 这些角平分线的相应线段之长记为 i_a, i_b, i_c 及 e_a, e_b, e_c. $\mathscr{C}$ 的中线就是直线 $\left\langle x, \dfrac{y+z}{2}\right\rangle$, $\left\langle y, \dfrac{z+x}{2}\right\rangle$, $\left\langle z, \dfrac{x+y}{2}\right\rangle$, 相应的线段之长记为 m_a, m_b, m_c.

10.1.5 根据 9.7.5, 存在唯一的与 $\mathscr{C}$ 外接的圆,它的半径记为 R. 存在四个圆与 $\mathscr{C}$ 的三条边相切,一个在内部,称为内切圆,三个在外面,称为旁切圆. 它们的半径分别记为 r, r_a, r_b, r_c. 最后,把 $\mathscr{C}$ 的面积记为 S(参看 9.12.4).

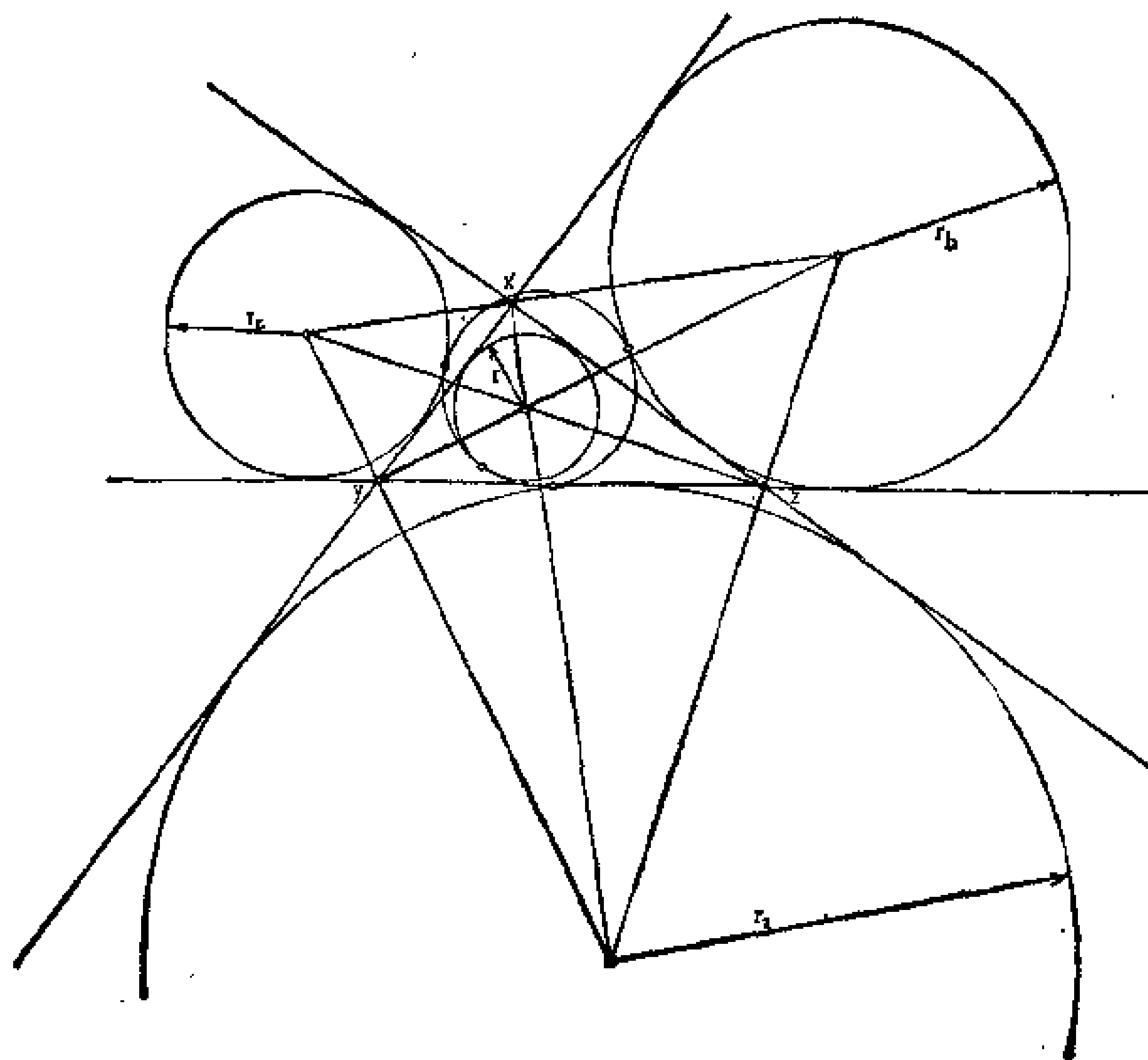


图 10.1.5.

10.2 古典的结果

10.2.1 存在性. 存在使 $xy=c$, $yz=a$, $zx=b$ 的三角形 $\{x, y, z\}$ 的充要条件是 a, b, c 满足以下三个严格三角不等式:

$a<b+c$, $b<c+a$, $c<a+b \Leftrightarrow |b-c|<a<b+c$.

事实上从公式 10.3.1 可看出只要能找出 $A\in]0, \pi[$ 使 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 就可以了. 因此 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\in]-1, 1[$, 这样就得到了所需结果. 另外一种证法是 9.7.3.4 的证明, 其中用到了 9.7.3.8.

10.2.2 等腰三角形. $\mathscr{C}$ 是等腰三角形的充要条件是它的两个角相等. 只有$\Leftarrow$需要证明;这可从公式 10.3.1 导出,因为

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$$

可写成 $(a-b)[(a+b)^2-c^2]=0$, 再应用 10.2.1 就可得到所需结果.因此一个三角形是等边三角形的充要条件是三个角相等. 它们的公共值是 $\pi/3$, 这可从 10.2.4 或 10.3.1 得出.

10.2.3 直角三角形. $\mathscr{C}$ 以 x 为直角顶点的充要条件是 $a^2=b^2+c^2$(参见 9.2.3 或 10.3.1).

10.2.4 内角之和 我们总是有 $A+B+C=\pi$. 这可应用 8.7.5.3 加以证明: 因 $\overrightarrow{xz}$ 在 $\overrightarrow{xy}$ 和 $\overrightarrow{yz}$ 之间,同样 $\overrightarrow{yz}$ 在 $\overrightarrow{xz}$ 与 $\overrightarrow{yx}$ 之间,从而

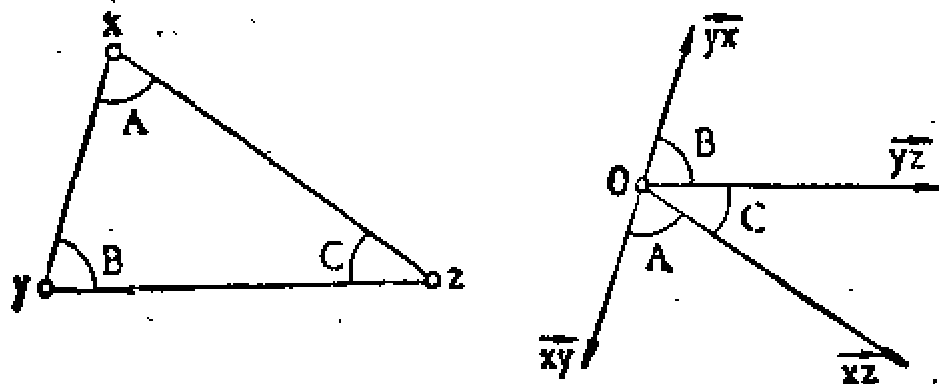


图 10.2.4.

$$\overrightarrow{xy},\overrightarrow{xz}+\overrightarrow{xz},\overrightarrow{yz}+\overrightarrow{yz},\overrightarrow{yx}=\overrightarrow{xy},\overrightarrow{yx}=\pi.$$

以后我们将遇到这样的几何：其中三角形角之和总是$>\pi$（参见 18.3.8.4）或$<\pi$（参见 19.5.4）.

10.2.5 共点性. 读者在插图中可能已注意到：高、中线、内角平分线(或一条内角平分线与两条外角平分线)、垂直平分线都是共点的.中线的共点性是 3.4.10 的结果，角平分线的共点性是 9.14.3 的性质的推论. 垂直平分线的共点性可从 9.7.5 得到. 只有高的共点性的证明需要一点技巧. 譬如说我们可通过 $\mathscr{C}$ 的顶点作对边的平行线；这样可作出一个三角形 $\mathscr{C}'$，它的垂直平分线就是$\mathscr{C}$的高！也请参见 10.13.1 及 17.5.4. $\mathscr{C}$ 的高的交点称为$\mathscr{C}$的垂心.

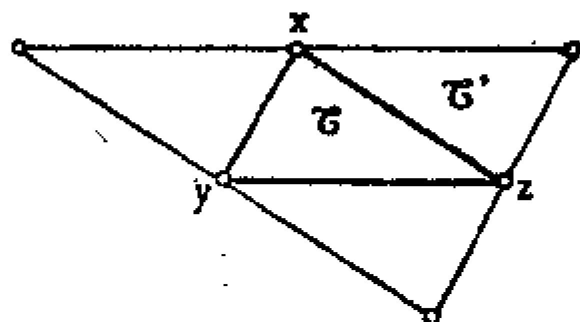


图 10.2.5.

10.2.6 全等的情形. 对于两个三角形 $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$，它们的元素采用 10.1.2 的记号，必要时加上一撇以作区分，那么以下条件是等价的：

$$\begin{cases}\text{(i) 存在 } f\in \mathrm{Is}(X) \text{ 使得 } f(x)=x',\ f(y)=y',\ f(z)=z';\\ \text{(ii) } a=a',\ b=b',\ c=c';\\ \text{(iii) } A=A',\ b=b',\ c=c';\\ \text{(iv) } A=A',\ B=B',\ c=c'.\end{cases}$$

这可从 9.7.1 以及公式汇集 10.3 得出.只是要小心，在利用公式汇集时，正弦的值不能唯一确定 0 与 π 间的角，而余弦值却能确定这个角. 因此在"正弦或余弦"$\Longrightarrow$"角"的方向上只能利用余弦，不能利用正弦.

如果两个三角形满足上述条件中的任一个，就称为全等的.

10.2.7 相似的情形. 在同样记号下，以下条件等价:

$$\begin{cases}\text{(i) 存在 } f\in \mathrm{Sim}(X) \text{ 使得 } f(x)=x',\ f(y)=y',\ f(z)=z;\\ \text{(ii) } \dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}=\dfrac{c'}{c};\\ \text{(iii) } A=A',\ B=B',\ C=C'.\end{cases}$$

应用 9.5.3.1 以及公式就能看到 (i) ⇒ (iii) ⇒ (ii). 为了得到 (ii) ⇒ (i)，只需作一个比值为

$$\frac{a}{a'}\left(=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\right)$$

的相似变换，把它归结到全等的情形就可以了.

10.3 公式汇集

记号同 10.1，另外再加上 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ($\mathscr{C}$ 的半周长). 这样就有

10.3.1
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};$$

10.3.2
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R;$$

10.3.3
$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bc\sin A=pr$$
$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

10.3.4
$$R=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}};$$

10.3.5 $$r = \frac{S}{p}, \quad r_a = \frac{S}{p-a};$$

10.3.6 $$i_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc},$$

$$e_a = \frac{2}{b-c}\sqrt{(p-b)(p-c)bc} \quad (若\ b > c);$$

10.3.7 $$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}.$$

10.3.1 的第一个公式就是 8.1.2.4 的公式，再利用 8.6.3 及 9.1.1 转化过来。第二个公式从 $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$ 得出，第三个则从

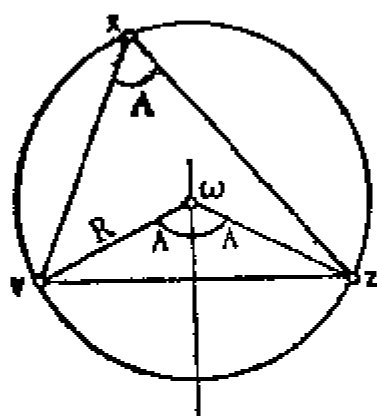


图 10.3.7.1.

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}$$

得出。为导出 10.3.2，把 $\mathscr{C}$ 的外接圆中心记为 ω，根据 10.9.3，三角形 ωyz 在 ω 的角等于 $2A$，从正弦的定义可得 $a = 2R\sin A$。读者可能希望不要涉及到 10.9.3，我们可以利用 9.7.3.7 以得到 10.3.4 以及 10.3.3 的最后一个等式。

10.3.3 的第一个等式就是 9.12.4.4，第二个等式来自 $h_b = c\sin A$，第三个等式可把 $\mathscr{C}$ 分割成三个三角形：$\mathscr{C} = \{x, y, \alpha\} \cup \{y, z, \alpha\} \cup \{z, x, \alpha\}$ 而得出，其中 α 是 $\mathscr{C}$ 的内切圆心。每个小三角形过 α 的高都是 r，对边分别是 a, b, c，利用 9.12.4.4 就能导出所需等式。最后一个等式是 10.3.1 的推论。

等式 10.3.4 可从 9.7.3.7 导出。这里它也可看成是 10.3.1 及 10.3.2 的直接推论。

至于 10.3.5，可采用与 $S = pr$ 类似的方法，不过取角 A 内的旁切圆的中心为 α'，这样就有

$$\{y, z, \alpha'\} \cup \mathscr{C} = \{x, y, \alpha'\} \cup \{x, z, \alpha'\},$$

因而

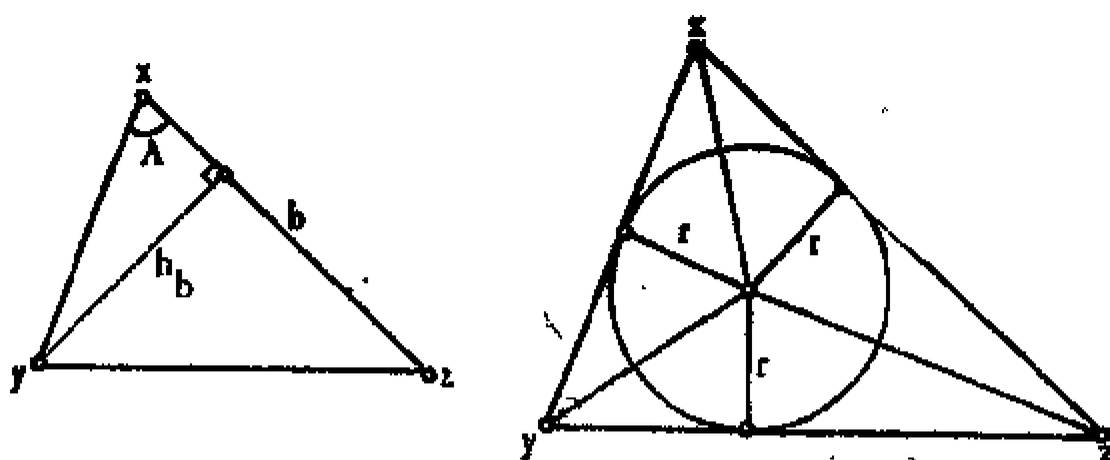


图 10.3.7.2.

$$\text{面积}(\mathscr{C}) = \text{面积}(\{x, y, \alpha'\}) + \text{面积}(\{x, z, \alpha'\}) - \text{面积}(\{y, z, \alpha'\}).$$

这三个三角形过 α' 的高都是 r_a，而相应的边长是 b, c, a.

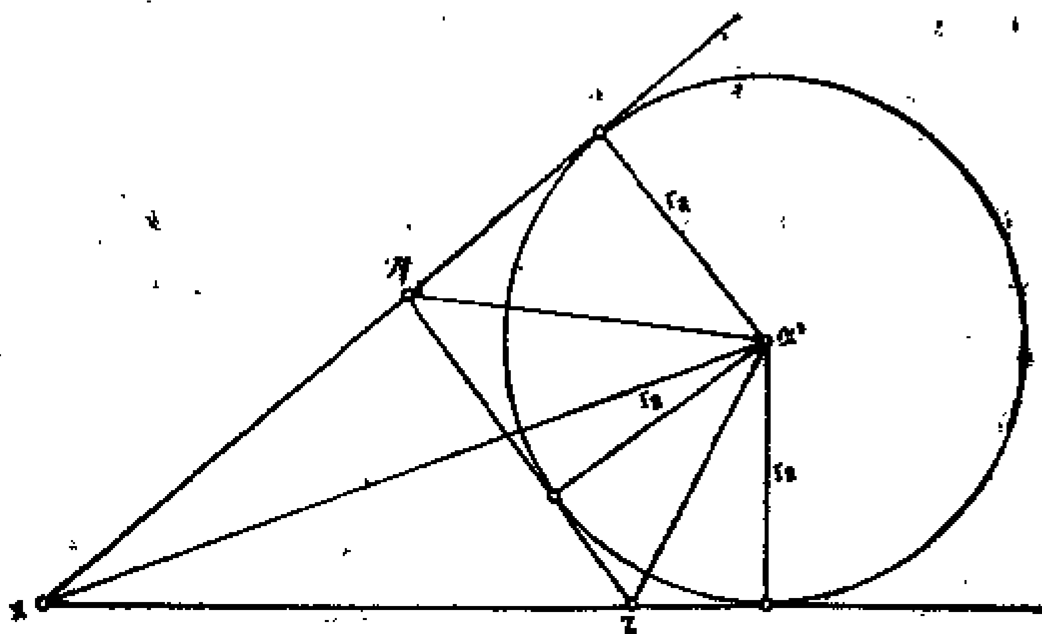


图 10.3.7.3.

公式 10.3.7 就是 9.7.6.5. 剩下要证 10.3.6, 把 e_a 留给读者. 至于 i_a, 把过 x 点的角平分线与边 $\langle y, z\rangle$ 的交点记为 s, 注意到三角形 $\{s, y, x\}$ 及 $\{s, z, x\}$ 在 s 点的角有相同的正弦, 应用 10.3.2 就可得到:

10.3.8 $$\frac{sy}{b} = \frac{sz}{c} = \frac{sy + sz}{b + c} = \frac{a}{b + c}.$$

再次将 10.3.2 应用于三角形 $\{x, s, z\}$，并两次使用 10.3.1，就能得到所需公式。

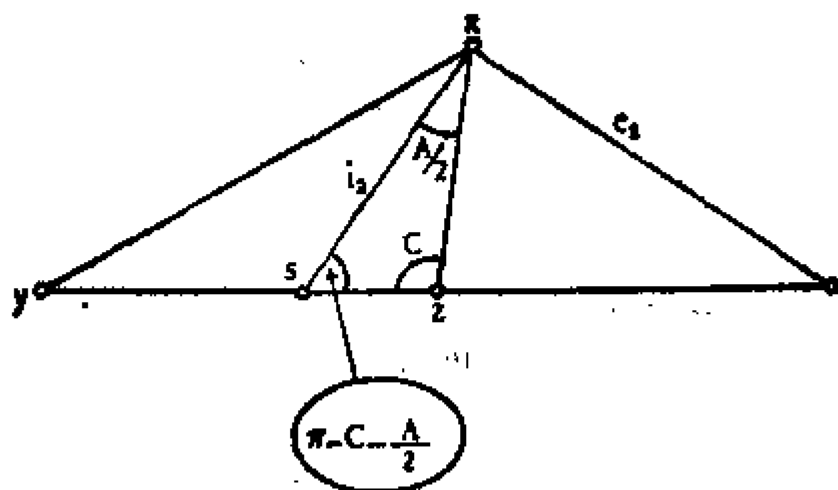


图 10.3.8.

10.3.9 附注. 当三角形是直角三角形时，有一个很好的练习可做：观察前面的公式会变成怎样的形状并且作一些验证.

10.3.10 应用：Morley 定理.

这个定理的结论很简单，但它的证明却不是直接的. 其几何证法可参看 10.13.4 以及 9.14.33.5. 关于由角的三等分线构成的图，请参见 [LB1] 第 173—194 页，以及 9.14.34.5 和 10.13.23. 最后请参看 [CAL].

Morley 定理是这样的：把三角形 $\mathscr{C}=\{x, y, z\}$ 的角（看作 $]0,\pi[$ 内的实数）三等分，它们的交点记为 p, q, r，则三角形 pqr 是等边三角形（为了体会这个定理的意义，最好在阅读后面的证明以前先亲自尝试一下给出几何的或三角的证明）. 置

$$\alpha=\frac{A}{3},\ \beta=\frac{B}{3},\ \gamma=\frac{C}{3};$$

把 10.3.2 应用于 $\{x, y, z\}$ 以及 $\{x, y, r\}$，再应用 10.2.4，可得

$$rx=2R\,\frac{\sin\beta\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)},$$

其中 R 是 $\mathscr{C}$ 的外接圆半径. 因 $\alpha+\beta+\gamma=\pi/3$，通过三角计算(见 8.7.8 及 8.12.8)，可导出

$$rx = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right).$$

同理

$$qx = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right),$$

即

$$\frac{rx}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)} = \frac{qx}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)} = 8R\sin\beta\sin\gamma;$$

但因$\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)+\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)+\alpha=\pi$，我们可把公式 10.3.2 应用于这样一个三角形：它的一条边是 rx，三个角是 $\frac{\pi}{3}+\gamma$，$\frac{\pi}{3}+\beta$ 及 α，就可证明这个三角形恰好就是 $\{x, r, q\}$，再一次应用 10.3.2 就得出 $rq = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. 同理 qp 和 pr 的长度也是同一个值。

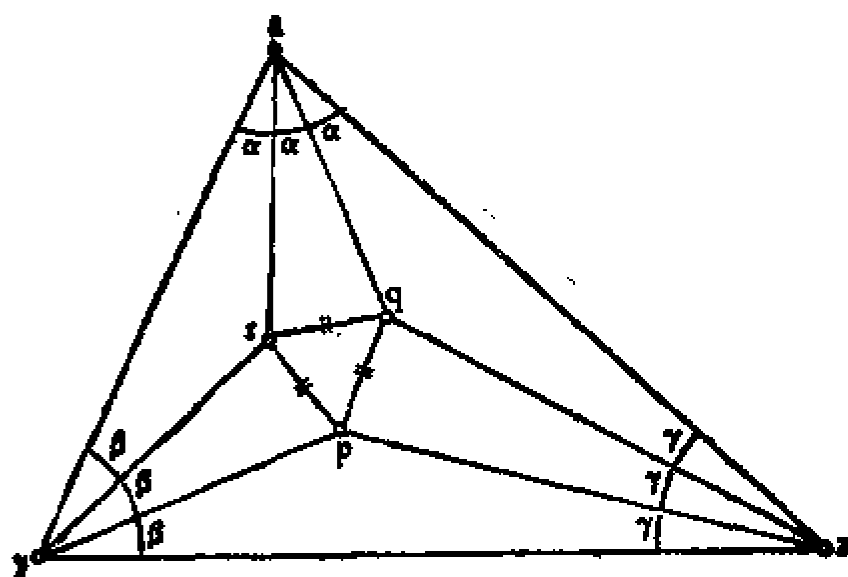


图 10.3.10.

10.3.11 三角形的几何

关于三角形有许多结果. 如要连贯的阐述，可参看 [R-C1] 注 III. 如只需几个例子，可见 10.11.

10.4 不等式及极小值问题

10.4.1 等周不等式. 对于任意的三角形，总有 $S \leqslant \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$，而且等式当且仅当等边三角形才能成立.

只需应用 10.3.3 及 11.8.11.6，就能得出

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant \left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

而且等式成立当且仅当 $p-a=p-b=p-c$.

10.4.2 附注. 以后在 10.5 及 12.11.1 将会遇到 10.4.1 的两个推广. 至于三角形的“等直径”不等式（参见 9.13.8），它可直接从 10.3.3 导出，因为 $\mathscr{C}$ 的直径是 $\sup\{a, b, c\}$.

10.4.3 Fermat 问题. 从 9.7.6.3 可导出

$$tx^2 + ty^2 + tz^2 \geqslant gx^2 + gy^2 + gz^2 \quad \forall t \in X,$$

而且只有当 t 处在 $\mathscr{C}$ 的重心 $g = \frac{x+y+z}{3}$ 上时才有等号成立. 运用 10.3.7 及 3.4.10 的结果可把极小值表成 a, b, c 的函数，这样就给出了一个不等式.

令人惊奇的是，对函数 $t \longmapsto tx + ty + tz$ 的极小值的研究要比上述问题困难得多(原因在于距离不是双线性的，而它的平方却是双线性的). 这就是 Fermat 问题. 9.10.6 已指出它的解，就是找 X 的点 t，使得从 t 看出去三角形 $\mathscr{C}$ 的三条边的视角都是 $2\pi/3$. 完整的结果如下所示：或者 $\mathscr{C}$ 的一个角 $A \geqslant 2\pi/3$，那么极小值仅在 x 点达到；或者 $\mathscr{C}$ 的所有的角都 $< 2\pi/3$，那么存在 X 的唯一点 ω，使得从 ω 看 $\mathscr{C}$ 的三条边时都成 $2\pi/3$ 角，极小值仅在 ω 才能达到.

首先，如果 t 是这个极小问题的解，那么它必须在三角形之内，否则，设 t 和 x 处在被 $\langle y, z\rangle$ 分割的两个不同半平面上，过

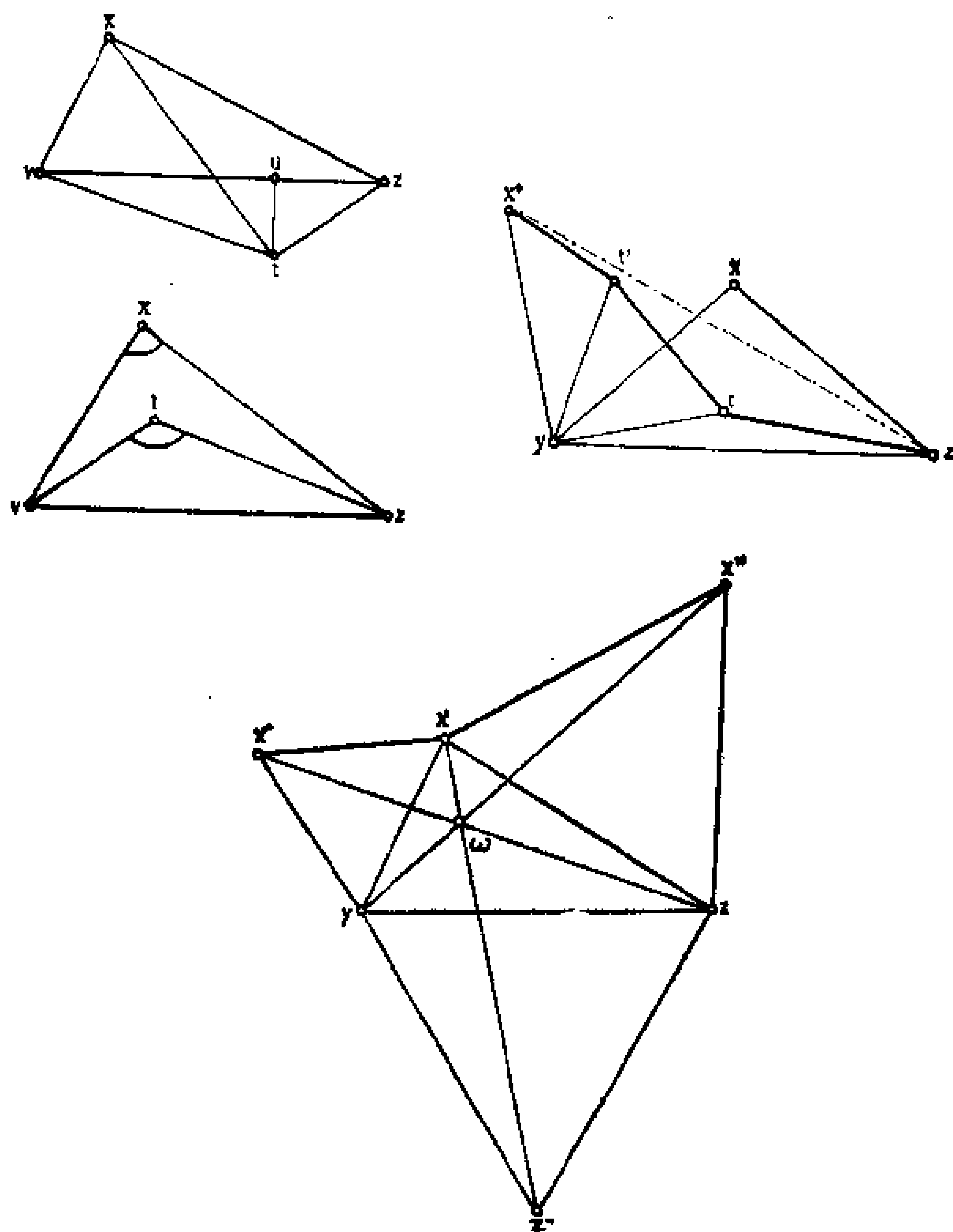


图 10.4.3.

t 向 $\langle y, z\rangle$ 作垂线的垂足设为 u，就有 $tx+ty+tz>ux+uy+uz$（应用 9.2.2）。

如果 $A\geqslant 2\pi/3$，则对 $\mathscr{C}$ 内任意的 $t\neq x$，t 在 $\{t, y, z\}$ 中所成的角 $>2\pi/3$，因此极小值不能在 t 达到。由于 $\mathscr{C}$ 是紧

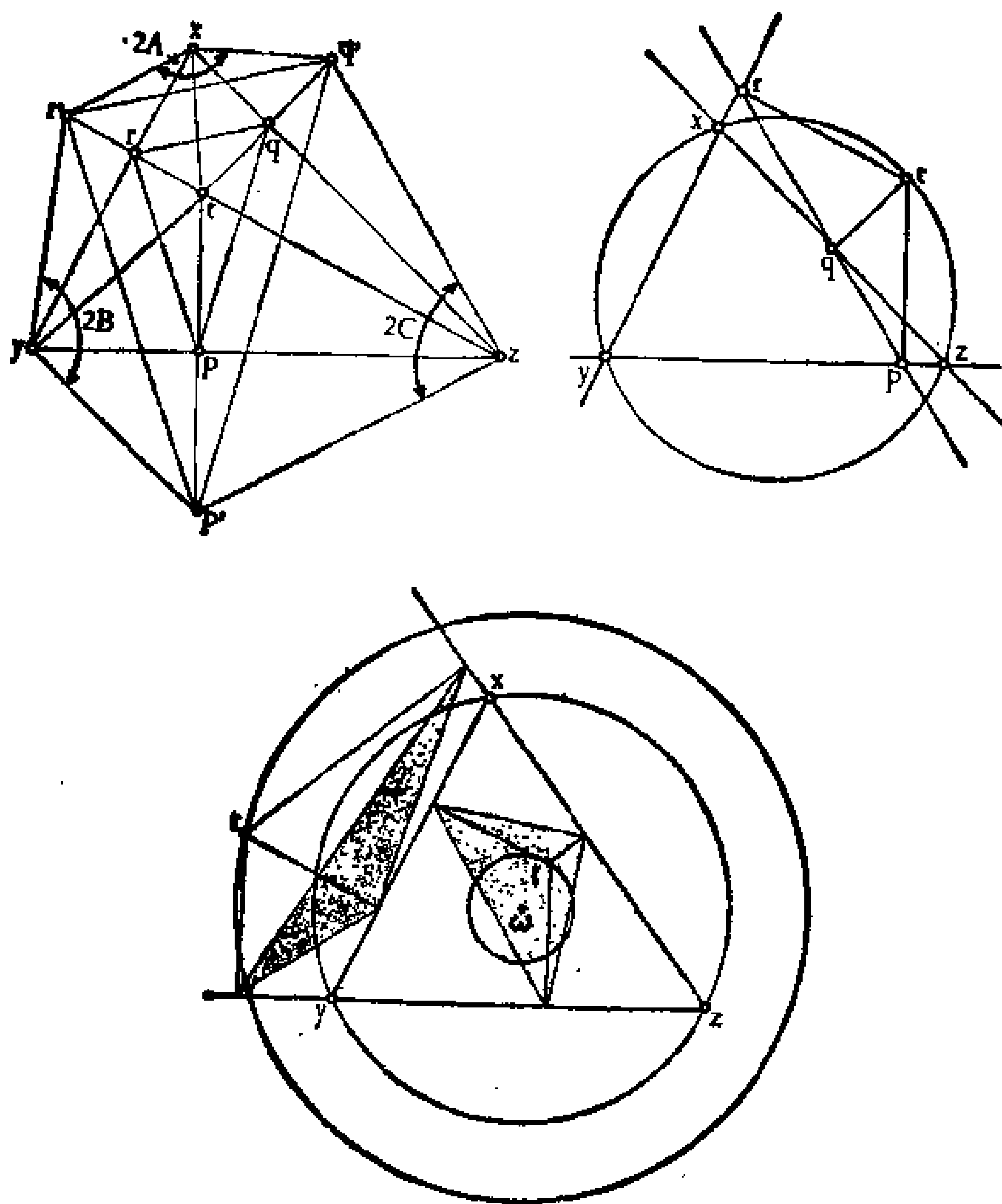


图 10.4.5.

集，故极小值必定在某一点上达到，这个点只能是 x。

现在假设 $\mathscr{C}$ 的三个角严格小于 $2\pi/3$. 把X定向，设 f 是以 y 为中心的 $\pi/3$ 角旋转. 对任意的 $t\in X$，记 $t'=f(t)$，$x'=f(x)$，则

$$tx+ty+tz=x't'+t't+tz\geqslant x'z,$$

使等式成立的充要条件是 x', t', t, z 在一直线上并且保持正确

的次序．用同样方法作 $z''=f^{-1}(z)$，由于 $\mathscr{C}$ 的角 $<2\pi/3$，直线 $\langle x, z''\rangle$ 与 $\langle z, x'\rangle$ 相交于一点 ω，使得 $x', \omega'=f(\omega)$，ω，z 共线并且有正确的次序． 于是 ω 实现了 $\omega x+\omega y+\omega z=x'z$，这样就完成了证明．

我们附带证明了一个事实：图 10.4.3 的三条直线 $\langle x', z\rangle$，$\langle x, z''\rangle$，$\langle y, x''\rangle$ 交于一点，而且夹角都是 $\pi/3$．

10.4.4 附注． 9.4 已经研究过有极小周长的 $\mathscr{C}$ 的内接三角形．

10.4.5 垂足三角形的面积． 设三角形 $\mathscr{C}=\{x, y, z\}$，点 $t\in X$，把 t 在 $\mathscr{C}$ 的三条边上的正交射影所成的三元组 $\{p, q, r\}$ 称为 t 的垂足三角形(注意到 p, q, r 共线时 实际上不再是三角形)．我们想研究垂足三角形的面积，譬如说，当 t 取在 $\mathscr{C}$ 内的哪一位置时三角形面积为极大？为此要引进定向三角形及它们的面积．

10.4.5.1 定义． 定向平面 X 上的**定向三角形**是 X 的点的三元组 (x, y, z)．(x, y, z) 的**面积**是 $\mathscr{A}(p, q, r)=\lambda\bar{x}(\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz})$ (参见 8.11.3)．

可以直接验证 $\mathscr{A}$ 关于循环置换不变，而且

10.4.5.2 $$\mathscr{A}(x, y, z)=\mathscr{A}(t, x, y)+\mathscr{A}(t, y, z)+\mathscr{A}(t, z, x).$$

如果 $\sigma\in \mathrm{Is}^{-}(X)$，则 $\mathscr{A}(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))=-\mathscr{A}(x, y, z)$．

设 X 是定向的，$t\in X$，$\mathscr{C}$ 是通常三角形．除 p, q, r 外，再引进 t 关于 $\mathscr{C}$ 的边的对称点 p', q', r'，则

10.4.5.3 $$\mathscr{A}(p, q, r)=\frac{1}{2}\mathscr{A}(x, y, z)-\frac{1}{8}\sin 2A\cdot tx^2-\frac{1}{8}\sin 2B\cdot ty^2-\frac{1}{8}\sin 2C\cdot tz^2.$$

其证明方法就是参照图 10.4.5 作代数计算． 事实上六边形 $\{x, r', y, p', z, q'\}$ 的面积是三角形 $\{x, y, t\}$，$\{x, y, r'\}$，$\{y, z, t\}$，$\{y, z, p'\}$，$\{z, x, t\}$，$\{z, x, q'\}$ 的面积之和，也是 $\{p', q', r'\}$，$\{x, r', q'\}$，$\{y, p', r'\}$，$\{z, p', q'\}$ 的面积之和．因此有以下代数式：

$$\begin{aligned}2\mathscr{A}(x,y,z)&=2\mathscr{A}(t,x,y)+2\mathscr{A}(t,y,z)\\&\quad+2\mathscr{A}(t,z,x)=\mathscr{A}(t,x,y)-\mathscr{A}(r',x,y)\\&\quad+\mathscr{A}(t,y,z)-\mathscr{A}(p',y,z)+\mathscr{A}(t,z,x)\\&\quad-\mathscr{A}(q',z,x)=\mathscr{A}(p',q',r')+\mathscr{A}(x,r',q')\\&\quad+\mathscr{A}(y,p',r')+\mathscr{A}(z,q',p').\end{aligned}$$

但因 (p',q',r') 是 (p,q,r) 通过以 t 为中心．比值为 2 的位似变换而得到的，所以 $\mathscr{A}(p',q',r')=4\mathscr{A}(p,q,r)$。并且根据 10.3.3 以及 8.7.7.8，有

$$\mathscr{A}(x,r',q')=\frac{1}{2}\sin 2A\cdot xr'\cdot xq'=\frac{1}{2}\sin 2A\cdot tx^2,$$

这样就得到了 10.4.5.3。

从 10.4.5.3 及 9.7.6 可以知道，只要我们知道质点 $(\sin 2A, x)$，$(\sin 2B, y)$，$(\sin 2C, z)$ 的重心，问题就完全解决了。而这个重心就是 $\mathscr{C}$ 的外接圆的中心 ω，这是因为从 10.3.2 的证明可以看出 ω 满足

$$\sin 2A\cdot\overrightarrow{\omega x}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{\omega y}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{\omega z}=0\ (\text{参看 } 3.4.6.5).$$

10.4.5.4 我们不想对问题作深入讨论，只是导出 9.7.6.2 的几个结论：对于 k 的某些值，X 中使得关于 $\mathscr{C}$ 的垂足三角形的面积(不计符号)取定值 k 的点的轨迹是以 ω 为中心的两个圆，而对于其它的 k 值，轨迹是一个圆．一个没有意料到的额外收获是 X 中使 p,q,r 共线的点的轨迹是 $\mathscr{C}$ 的外接圆（"Simson 直线"定理，参看 10.9.7.1)：事实上 p,q,r 共线的条件就是 $\mathscr{A}(p,q,r)=0$，而 x,y,z 满足定理条件，因此所求的轨迹应该是以 ω 为中心过 x (以及 y 和 z！) 的圆，就是 $\mathscr{C}$ 的外接圆．我们得到公式：

$$4S=R^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C).$$

10.4.5.5 当 x 描绘出 $\mathscr{C}$ 的外接圆时，与它相伴的 Simson 直线的包络是有三个尖点的内摆线．这说明在任一三角形内有一个三阶对称．参看 9.14.34.3.D.

10.4.6 Erdös-Mordell 定理． 以下的定理有个有趣的故事：它

被 Erdös 在1935年猜想到，在 1937 年被 Mordell 用一个绝对不是初等的方法加以证明．尽管它的陈述很简单，还是要等到 1945 年才由 D. K. Kazarinoff 给出初等证明．我们这里只是叙述一下定理，让读者用这个定理试试自己的能力．关于完整的参考材料，可参见 [KF] 第78页或 [FT1] 第12页．

10.4.7 定理． 设 $\mathscr{C}$ 是一个三角形，对 $\mathscr{C}$ 内任意一点 t，设 p，q，r 如同 10.4.5 所定义，则有

$$tx + ty + tz \geqslant 2(tp + tq + tr),$$

只有等边三角形才能使等号成立．

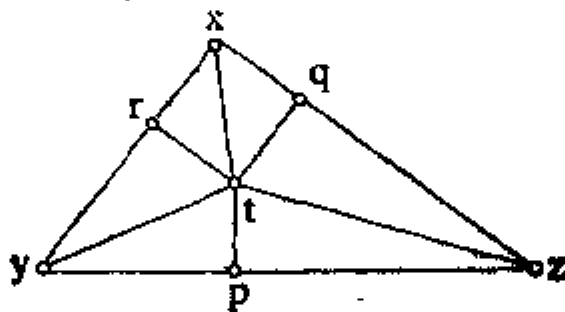


图 10.4.7.

10.4.8 注． 关于三角形内的其它不等式可参看 10.13.5 以及 [GS]．

10.5 多 边 形

关于这一主题，我们只给出一些参考资料．关于一个凸多边形，我们在 9.4 已研究过多边形弹子盘．与 10.4.3 类似的问题请参看 10.13.8．

10.5.1 10.4.1 的推广如下所述：如果 $\mathscr{P}$ 是 n 边凸多边形，S 是它的面积，P 是周长，则

$$S \leqslant \frac{1}{4n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}} P^2.$$

当且仅当 $\mathscr{P}$ 是正多边形时才能使等号成立．关于其证明及进一

步的讨论，请参看 12.12.15 或 [FT1] 第8—11页和 [GR] 第192页。

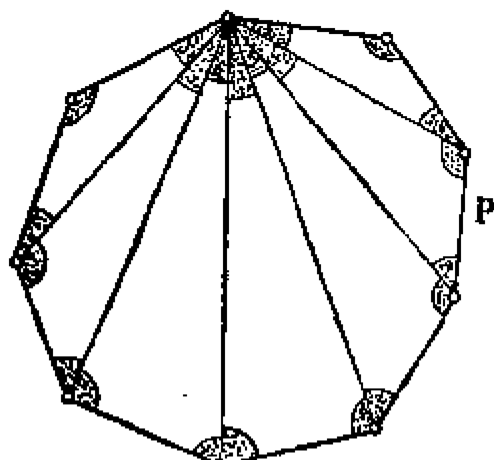


图 10.5.2.

10.5.2 如果 P 是 n 边凸多边形，则 P 的内角之和为 $(n-2)\pi$（参看 12.1.12）。

为了得到这个公式，利用凸性把多边形从一个顶点分割成 $n-2$ 个三角形，把 10.2.4 用到这些三角形上再求和，这样就同时得到 $(n-2)\pi$ 以及 P 的所有内角之和。

10.6 四 面 体

关于四面体我们不准备讲太多的东西。最使人感兴趣的是指出三角形的某些结果不能推广到四面体，出现了新的现象。我们只详细讨论这些现象中的一个，即“内切球面”，它出现在对与四面体四个面都相切的球面的研究中。此外仅提及四面体相对于三角形来说的两个特殊性质。第 10.6.1 至 10.6.5 节讨论三角形的结论的推广，从 10.6.6 起将讨论特有的现象。

有关四面体几何的参考材料可见 [C-B] 以及 [R-C2] 的注 IV。关于这一主题，我们在 [C-B] 的前言中可看到早在 1935 年时一些教师就已经抱怨说学生的代数技巧由于新教学大纲而下降了。如果有哪一位读者能发现一块古埃及的书板其中有同样怨言的话，他将能获得一笔奖金。

10.6.1 设 $\mathscr{C}=\{x, y, z, t\}$ 是四面体(参见 2.4.7)。在这一节里总是假设 $\mathscr{C}$ 位于三维空间 X 内。$\mathscr{C}$ 的棱既是指直线 $\langle x, y\rangle, \cdots$，又是指距离 $xy, \cdots$。同样地，$\mathscr{C}$ 的面既是指平面 $\langle x, y, z\rangle, \cdots$，又是指平面 $\langle x, y, z\rangle$ 的三角形 $\{x, y, z\}$，也指这个平面上的这个三角形的面积（参见 10.1.5）。把 $\mathscr{C}$ 的体积记为 V（参看 9.12.4），$\mathscr{C}$ 的外接球面的半径记为 R(参见 9.7.5)。

10.6.2 根据 9.7.1，一个四面体被它的六条棱确定到差一个同构（"四面体全等的情形"）。至于给定棱长的四面体的存在性，在 9.7.3.4 中已看到只要六条棱除满足 10.2.1 的四个严格三角形不等式外，再符合条件 $\Gamma(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)>0$。事实上（参见 9.14.23）从 $\Gamma(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)>0$ 可推导出三角形不等式。

10.6.3 中线. 把连接顶点与对面重心的线段称为 $\mathscr{C}$ 的中线，从 3.4.10 可推断得 $\mathscr{C}$ 的四条中线共点。我们可应用 9.7.6 计算这些中线的长。

10.6.4 定义四面体顶点的角则要困难得多，还颇有些棘手。这要用到第十八章。容易做的是引进两个面之间的二面角。我们不准备讨论它们，可参看 10.13.10。

10.6.5 从 9.7.3.3，9.7.3.7，9.12.4.3，可推导出用棱长表示 V 及 R 的公式：

$$V^2=\frac{1}{288}\Gamma(x,y,z,t),\quad R^2=-\frac{1}{2}\frac{\Gamma(x,y,z,t)}{\Delta(x,y,z,t)}.$$

10.6.6 高. 四面体的高就是过顶点与对面正交的直线。一般说来四面体的高不相交。参看［C-B］第 121 页或［R-C2］第 643 页。

10.6.7 Möbius 四面体. 存在四面体对使得其中一个的顶点都在另一个四面体的面上。这种现象在射影几何里可以得到很好的解释，参见 4.9.12 及 14.8.12.4。

10.6.8 内切球面.

已知四面体 $\mathscr{C}=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，要求出与 $\mathscr{C}$ 的四个面相切的球面 S，也就是说 S 的中心 ω 与这四个面等距。要避免犯的错误是：从图 10.1.5 加以类比，认为这样的球面有五个：一个在 $\mathscr{C}$ 的内部，另外四个在 $\mathscr{C}$ 所确定的四个"截锥"内。

为了解答这个问题，首先利用公式 9.2.6.4。把分别以 $\mathscr{C}$ 的四个面作为核的 X 上四个仿射形式记为 $f_i(i=1,2,3,4)$。另外再假设 $\|\vec{f}_i\|=1\forall i$，则 ω 应该满足

$$|f_1(\omega)|=|f_2(\omega)|=|f_3(\omega)|=|f_4(\omega)|,$$

这相当于仿射形式间的八个等式. 根据 2.4.8.5, "在一般情形", 即当 f_i 间没有线性关系时, 这个问题应该有八个解. 按这种方法讨论显然相当困难. 为此要在 X 内引入相对于 $\mathscr{C}$ 的重心坐标. 对于任意的维数总有以下引理:

10.6.8.1 引理. 设 $(x_i)_{i=1,\cdots,n+1}$ 是 X 的单形. 令

$$H_i = \langle x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{n+1} \rangle$$

是单形的第 i 个面. 把单形的体积记为 V, 把 H_i 的单形 $(x_j)_{j\neq i}$ 的体积记为 a_i, 则 $x \in X$ 相对于这个单形的重心坐标 (λ_i) 由以下条件确定:

$$\begin{cases} |\lambda_i| = \dfrac{a_i}{nV} d(x, H_i), \\ \lambda_i \geqslant 0 \text{ 或 } \leqslant 0 \text{ 由 } x \text{ 与 } x_i \text{ 关于 } H_i \text{ 是否在同一半空间内而定} \\ \text{(见 2.7.3)}. \end{cases}$$

实际上如果 f_i 是一个仿射形式使得 $\|\vec{f}_i\| = 1$, $H_i = f_i^{-1}(0)$, $f_i(x_i) > 0$, 则有(见 9.2.6.4)

$$d(x, H_i) = |f_i(x)| = \left| f_i\left(\sum_j \lambda_j x_j\right)\right| = |\lambda_i| f_i(x_i),$$

特别当 $x = x_i$ 时, $d(x_i, H_i) = f_i(x_i)$, 从 9.12.4.4 可知这正是 $\dfrac{nV}{a_i}$.

为了讨论方便, 定义四面体 $\mathscr{C}$ 的内部为使所有的 $\lambda_i \geqslant 0$ 的 x 的集合; $\mathscr{C}$ 的截锥是使三个 $\lambda_i \geqslant 0$, 另一个 $\leqslant 0$ 的 x 的集合; $\mathscr{C}$ 的三面形是使三个 $\lambda_i \leqslant 0$, 另一个 $\geqslant 0$ 的 x 的集合; $\mathscr{C}$ 的顶罩是使两个 $\lambda_i \geqslant 0$, 另两个 $\leqslant 0$ 的 x 的集合. 与每一个顶点相关的有 4 个截锥与 4 个顶罩. 共有六个顶罩, 分成三组相对的顶罩对.

如果 r 是与 $\mathscr{C}$ 的四个面相切的球面的半径, 则球面中心 ω 的 λ_i 满足以下等式:

$$\frac{|\lambda_1|}{a_1} = \frac{|\lambda_2|}{a_2} = \frac{|\lambda_3|}{a_3} = \frac{|\lambda_4|}{a_4} = \frac{r}{3V},$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1.$$

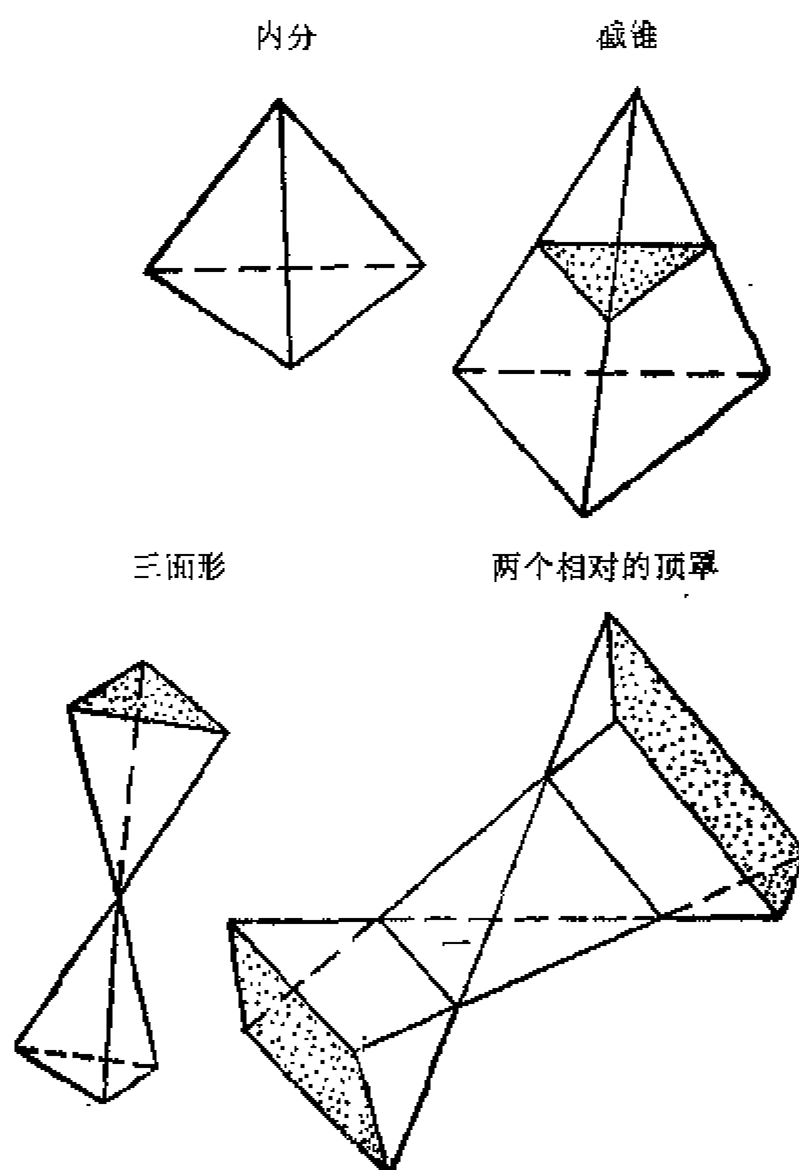


图 10.6.8.

由此可见恰好有一个球面内切于 $\mathscr{C}$，其半径为

$$r=\frac{3V}{a_1+a_2+a_3+a_4};$$

在每个截锥内有且仅有一个相切球面，例如在面 $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ 所确定的截锥内，其半径为 $r=\dfrac{3V}{a_1+a_2+a_3-a_4}$ ($a_4<a_1+a_2+a_3$，这是因为 a_4 是另外三个面在 H_4 上的射影的面积之和，应用 9.12.4.9 后可知这些面积严格地变小了)。 而顶罩的情形则不同，因为我们不知道 $a_1+a_2-a_3-a_4$ 究竟是什么，我们只知道如果在一个顶罩内有相切球面，那么在相对顶罩内肯定不会有. 为了完成讨论，假设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant a_4$. 如果这些面全相等(即有相司

面积)，就只有五个球面，在顶罩内没有球面．如果 $a_1=a_2>a_3=a_4$，有六个球面，并且只在 $\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，$\lambda_3<0$，$\lambda_4<0$ 的顶罩内有一个．如果 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3>a_4$ 以及 $a_1+a_4=a_2+a_3$，则有七个球面其中两个在顶罩内．在所有其它情形都有八个球面．

关于这些球面的详细讨论可参看 [R-C2] 第 653 页．我们在这里仅限于指出对正四面体（见 12.5.4.1）来说，有 $a_1=a_2=a_3=a_4$．但是不难作出非正则的四面体使它的四个面有相等面积．

10.7 球　　面

在以后几节，我们将把圆和球面放在与其它对象联系的情形中加以研究，有时一次研究几个对象间的关系．至于对球面本身的研究请参看第十八章．我们通常假定 $\dim X\geqslant 2$，因为当维数是 1 时，球面仅由两个点构成，因此是毫无兴味的．

10.7.1　定义． 称子集 $S(a,r)=\{x\in X: ax=r\}$ 为以 a 为中心 r 为半径的球面；如果 $n=\dim X=2$ 则称为圆．

10.7.2　与子空间的交集． 设 $S=S(a,r)\subset X$，Y 是 X 的仿射子空间，把 a 在 Y 上的射影记为(参见 9.2.4)，则(见 9.2.3)

$$\begin{cases}\text{如果 } d(a,Y)=ax>r: S\cap Y=\varnothing,\\ \text{如果 } d(a,Y)=ax=r: S\cap Y=\{x\},\\ \text{如果 } d(a,Y)=ax<r:\end{cases}$$

$$S\cap Y=S_Y(x,\sqrt{r^2-ax^2})=\{z\in Y: zx=\sqrt{r^2-ax^2}\},$$

10.7.3　附注． 根据我们所研究问题的性质，把半径为零的球面排除在外是合适的．为了不致使陈述太噜苏，我们把特殊情况留给读者去考虑，反正其中没有本质上的困难．

10.7.4　切超平面． 如果 $d(a,Y)=r$，则称子空间 Y 与 $S=S(a,r)$ 相切，更精确地说是切 S 于点 $Y\cap S$．在 $x\in S$ 存在一个且仅有一个切超平面，称为 S 在 x 点的切超平面，记为 T_xS．其特征是含 x 且与 $\overrightarrow{xa}$ 正交．它也可看成是向量子空间 $x^{\perp}$，参看

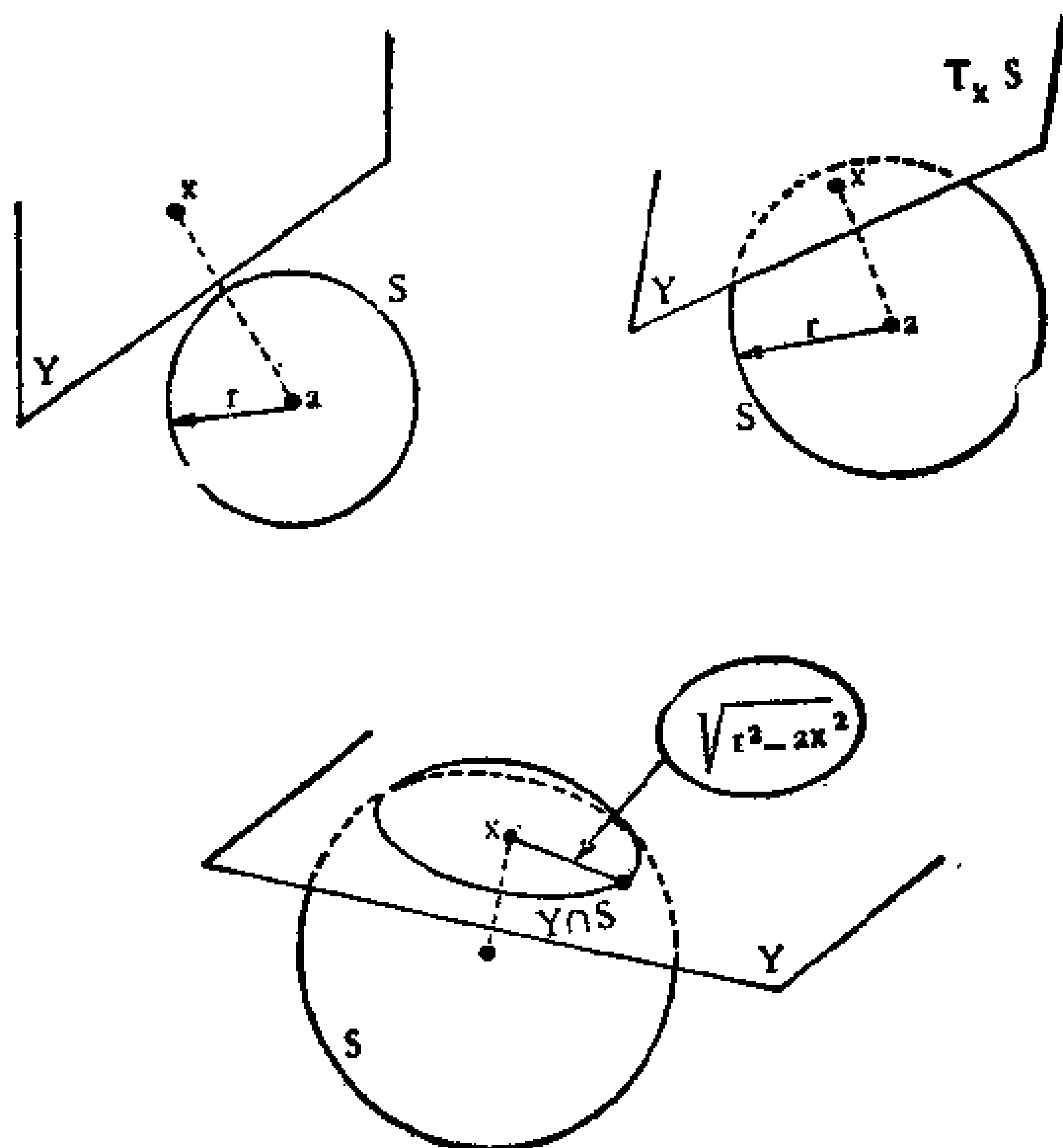


图 10.7.2.

18.1.2.4.

这个超平面与来源于其它理论的切超平面的概念相符：如果把S看成二次超曲面，则它在非退化二次超曲面意义下的切超平面重合于前面所述的切超平面．参见 14.3.8.

如果把 $S \subset X$ 看作微分子流形，它在微分意义下在x点的切空间 T_xS 就是落在S内的X的 C^1 类曲线在x点的切向量的集合，参见 18.3.3．这样定义的切空间与前面所述的切超平面重合．

10.7.5 两个球面的交． 在X内设 $S=S(a, r)$，$S'=S(a', r')$，$a \neq a'$（非同心球面），则从 10.2.1 可得：

$$\begin{cases} \text{如果 } |r-r'| \leqslant aa' \leqslant r+r' \text{ 不满足，则 } S\cap S'=\varnothing, \\ \text{如果 } aa'=r+r' \text{ 或 } aa'=|r-r'|\text{，则存在 } x \text{ 使 } S\cap S'=\{x\} \text{ 并且 } T_xS=T_xS', \\ \text{如果 } |r-r'|<aa'<r+r'\text{，则存在与 } \overrightarrow{aa'} \text{ 正交的超平面使得 } S\cap S'=S\cap H=S'\cap H \text{ 是}H\text{上以 } \langle a,a'\rangle\cap H \text{ 为中心的球面.} \end{cases}$$

如果 $aa'=r+r'$，则称 S,S' 是外切的：如果 $aa'=|r-r'|$，则称为内切. 在第三种情形称 S 和 S' 相割.

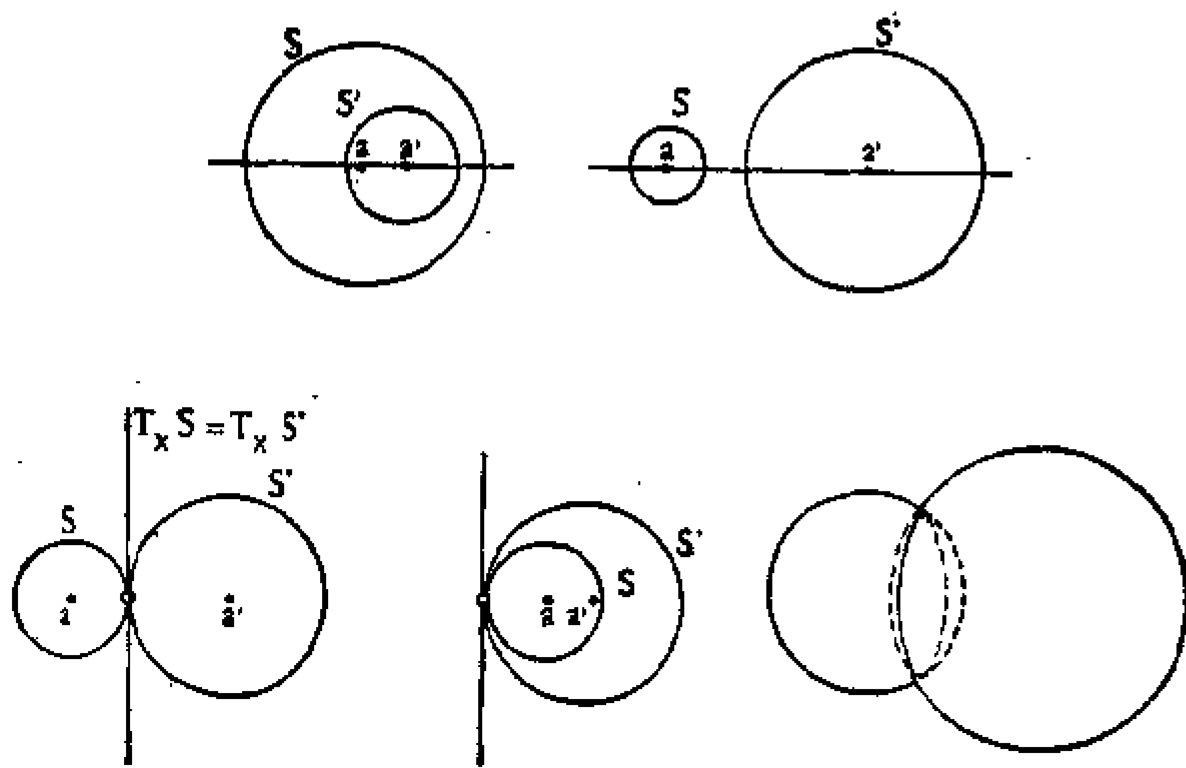


图 10.7.5.

10.7.6 解析几何. 对于球面来说没有太大的困难. 把X向量化后，$S=S(a,r)$ 的方程就是 $\|x-a\|^2=r^2$，即 $\|x\|^2-2(a|x)+a^2-r^2=0$. 反之，若 k,h 是纯量而α是X的向量（把X在任意一个点处向量化），则当 $k\neq 0$ 时，方程

$$k\|x\|^2+(\alpha|x)+h=0$$

代表

$$\begin{cases} \text{如果 } \|\alpha\|^2 - 4kh < 0\text{: 空集,} \\ \text{如果 } \|\alpha\|^2 - 4kh = 0\text{: 点 } \left\{-\dfrac{\alpha}{2k}\right\}, \\ \text{如果 } \|\alpha\|^2 - 4kh > 0\text{: } S\left(-\dfrac{\alpha}{2k}, \sqrt{\dfrac{\|\alpha\|^2 - 4kh}{4k^2}}\right). \end{cases}$$

举例来说，为了研究 $S \cap S'$（见 10.7.5），我们发现 $S \cap S'$ 被包含在 $\|x\|^2 - 2(a|x) - r^2 = \|x\|^2 - 2(a'|x) + r'^2$ 内，即当 $a \neq a$ 时含于超平面 $(a' - a|x) + r^2 - r'^2 = 0$ 内。

关于解析几何对球面的应用，可参见 9.7.3.7 以及整个第 20 章。

10.7.7 两个球面的交角. 如果 $S = S(a, r)$, $S' = S(a', r')$ 满足 $S \cap S' \neq \emptyset$，则角 $\varphi = \overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xa'} \in [0, \pi]$ 与 $x \in S \cap S$ 无关，被称为 S 与 S' 的交角。它由

$$\cos\varphi = \frac{r^2 + r'^2 - aa'^2}{2rr'}$$

所确定。如果 $\varphi = \pi$，则 S 和 S' 是外切的，如果 $\varphi = 0$，是内切的。如 $\varphi = \pi/2$，则称 S 和 S' 正交，记为 $S \perp S'$。

10.7.8 命题. 已知 n 维空间 X 的 $n+1$ 个球面 $S_i(i = 1, \cdots, n+1)$ 以及 $n+1$ 个角 $\varphi_i \in [0, \pi]$，则至多存在两个球面，它们与每个 S_i 交成角 $\varphi_i(i = 1, \cdots, n+1)$。

设 $S_i = S(x_i, r_i)$，且 $S = S(x_0, R)$ 是所求的球面。使用 9.7.3 的记号及结果，对于点 $(x_i)_{i=0,1,\cdots,n+1}$ 有

$\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}) = 0$ 以及 $d_{0i}^2 = R^2 + r_i^2 - 2Rr_i\cos\varphi_i$.

把 $d_{0i}(i = 1, \cdots, n+1)$ 的这些值代入 $\Gamma(x_0, x_1, \cdots, x_{n+1})$，再对行与列作些减法，就能得到关于 R 的二次方程：$\alpha R^2 + \beta R + \gamma = 0$，因而至多只有两个可能的半径。根据 9.7.1，当 R 已知时 $d_{0i} = x_0x_i$ 也知道了，因此至多只有两个可能的点 x_0。

10.7.9 例. 正交球面的情形是特别的，它至多只能有一个解，因为当所有的 φ_i 都等于 0 时，方程变成 $\alpha R^2 + \gamma = 0$。在 10.7.10.2

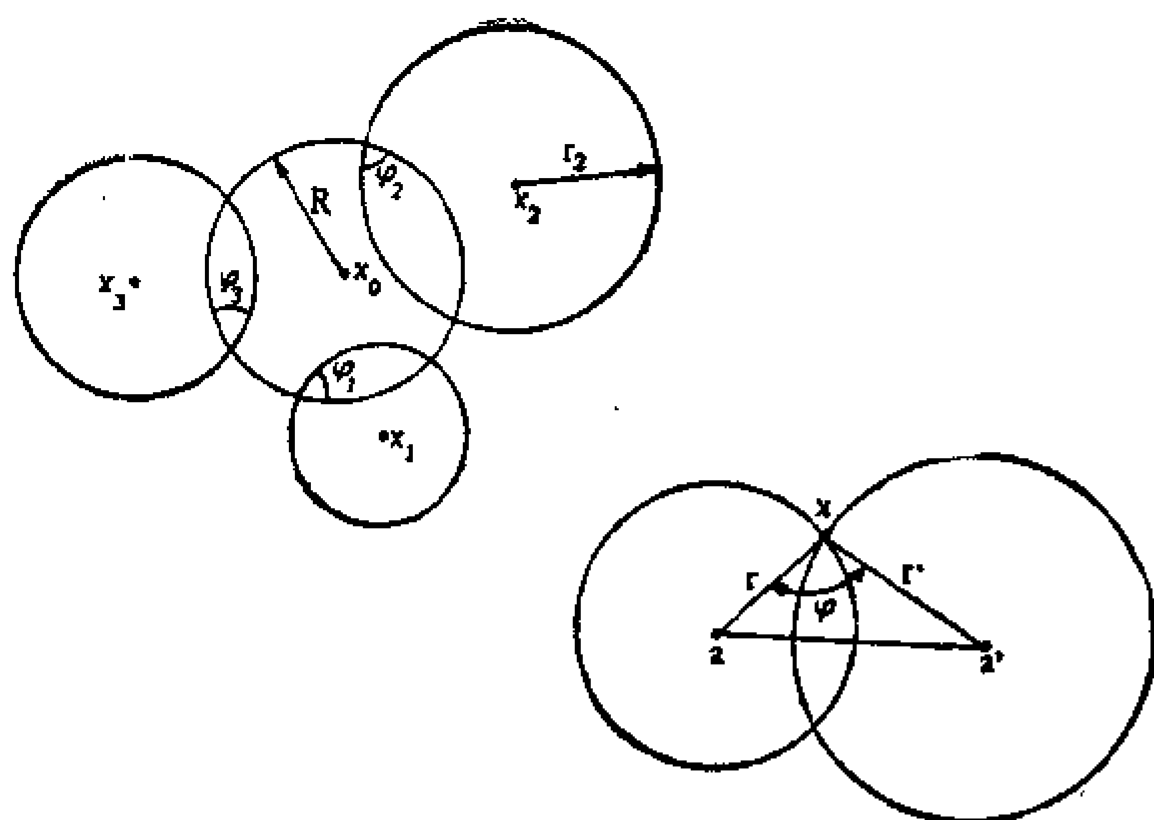


图 10.7.8.

还会遇到这种情形.

与 $n+1$ 个已知球面相切的球面显然可有 2^{n+1} 个解（至多），这是因为 $\varphi_i=0$ 或 π 有 2^{n+1} 种组合，但是如果把所有的 φ_i 都变

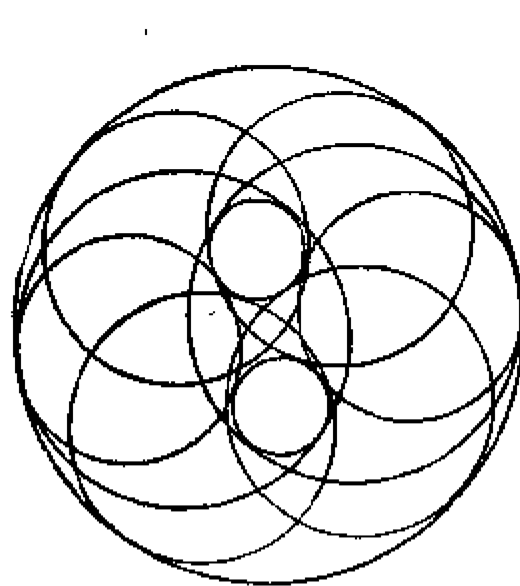


图 10.7.9.1.

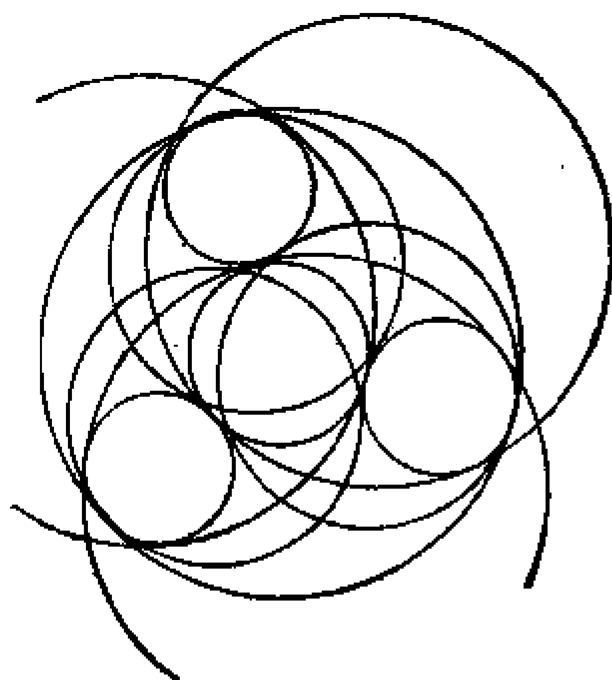


图 10.7.9.2.

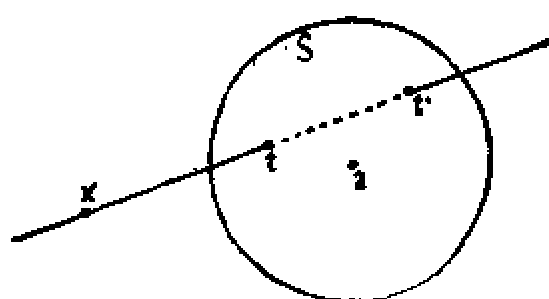


图 10.7.10

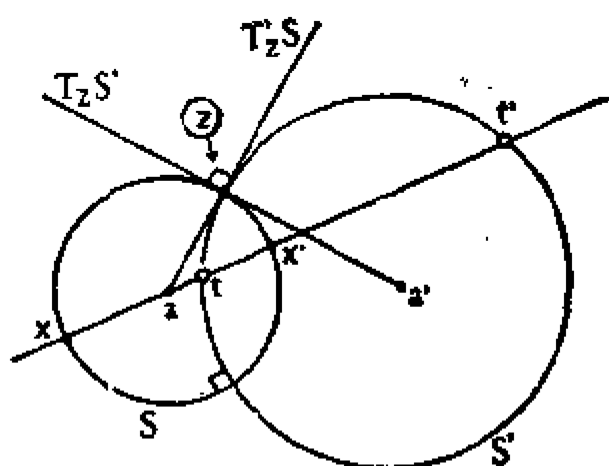


图 10.7.10.2.

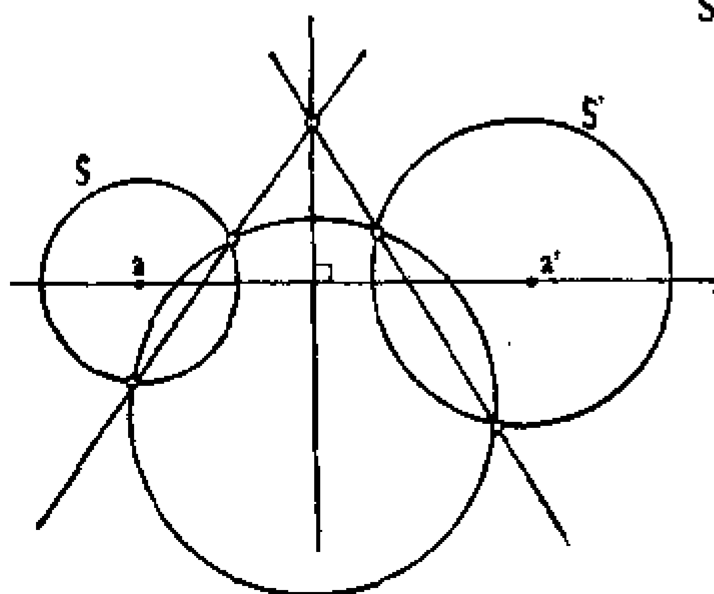


图 10.7.10.1.

成 $\pi-\varphi_i$，则方程 $\alpha R^2+\beta R+\gamma=0$ 仍然不变，因而至多有 2^{n+1} 个解．而且确实会有 2^{n+1} 个解．并且随着 $\varphi_i=0$ 或 π 的不同选择，有两个解或零个解．图 10.7.9.1 与 10.7.9.2 是平面的情形．但也有零个解的情形！

10.7.10 幂． 设 $S=S(a,r)$，$x\in X$，则对任意的过 x 且割 S 于 t，t'（可能有 $t=t'$）的直线 D，数量积 $(\overrightarrow{xt}|\overrightarrow{xt'})$ 是常数且等于 xa^2-r^2，它称为 x 关于 S 的幂，记为 P_xS．

这个数量的绝对值是 $xt.xt'$，符号＋或－随 x 在线段 $[t,t']$ 的外部还是内部而定，

把 $[t, t']$ 的中点记为 h，则证明就是写出下式：

$$(\overrightarrow{xt} \mid \overrightarrow{xt'}) = xh^2 - ht^2 = xa^2 - ah^2 - ht^2 = xa^2 - r^2.$$

在解析几何中，如果 S 的方程以 $\|\cdot\|^2$ 作为首项，则 P_xS 就是通过把 x 代入 S 的方程而得到的.

10.7.10.1 设 $S = S(a, r)$，$S' = S(a', r')$ 是使 $a \neq a'$ 的两个球面，则集合 $\{x \in X : P_xS = P_xS'\}$ 是与 $\overrightarrow{aa'}$ 正交的超平面（利用 9.7.6.5 及解析几何），被称为 S 与 S' 的根超平面（当 $n = 2$ 时是根轴）. 其几何作图法如图 10.7.10.1 所示，它用到了幂的定义.

10.7.10.2 $S = S(a, r)$，$S' = S(a', r')$ 的正交性（参看 10.7.7）可用多种方式表达，因此是一个很有用的概念. 球面 S，S' 为正交的充要条件是 $aa'^2 = r^2 + r'^2$，或 $P_aS' = r^2$，或 $P_{a'}S = r'^2$，或者是存在过 a 的直线 D，它割 S' 于 t, t'，割 S 于 x, x'，使得 $[x, x', t, t'] = -1$（调和分割）. 当然也有

$$T_zS \perp T_zS' \forall z \in S \cap S'.$$

由上所述可以推断出：与一些已知球面正交的球面的中心位于其中任两个球面的根超平面上. 这样就得到了 n 维空间 X 内 $n+1$ 个球面的根心的概念. 我们重新回到了 10.7.9.

10.7.10.3 幂的概念能帮助我们解决一些作图问题：例如在平面上作一个圆使它过两个已知点且与已知圆相切. 切点已在图 10.7.10.3.1 上标出.

另一个例子是图 10.7.10.3.2 的“第六圆”定理. 请不要把这个定理与 Miguel 的六圆定理（见 10.9.7.2）混淆，后者的证明更加复杂. 关于这些定理的新近的参考文献，可见 [DI] 第 256 页.

10.7.11 配极变换. 关于球面的配极变换是关于非退化二次曲线的配极变换的特例. 它并无使人特别感兴趣之处. 反而因涉及到无穷远点，在仿射的范围内会产生例外而使人感到不便（关于二次超曲面的配极变换参看 14.5）. 关于这个配极变换我们只提两个特点. 第一个是：x 关于 $S(a, r)$ 的极超平面 H 总是与 $\overrightarrow{ax}$ 正交，并且由

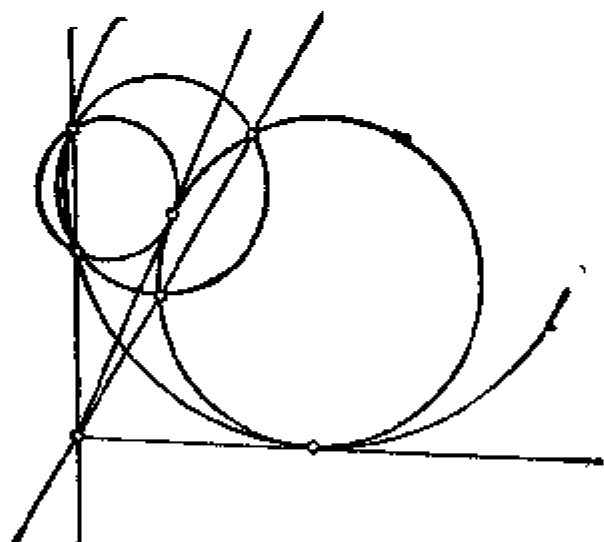


图 10.7.10.3.1.

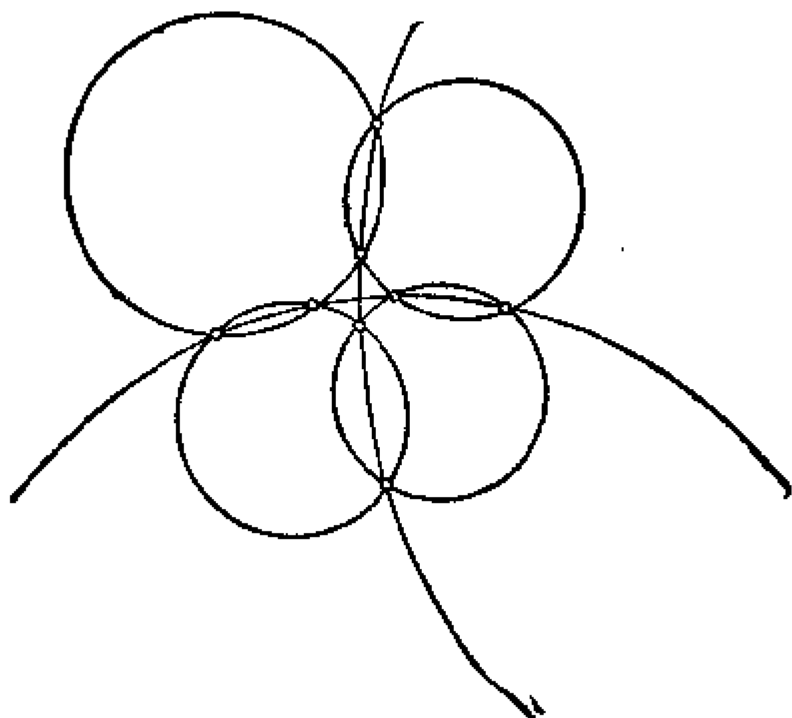


图 10.7.10.3.2.

$$d(a, H)=\frac{r^2}{ax}$$

所确定. 第二点是配极变换可用如下的初等方法定义(这是 10.7.10.2 的结果):两个点 x, y 关于 S 为共轭的条件就是以 xy 为直径的球面正交于 S.

关于配极变换的应用请参看 10.13.14.

10.8 反　　演

这里只讲初等理论．为了避免在本节遇到的种种例外情形以及为了能利用二次型这一有力工具，在第 20 章还要在更一般的情形下讨论．这里讲的一些内容是初等的，它将会对第 20 章的讨论有所启发．

10.8.1　定义． 以 c 为极点，以 $\alpha\in\mathbf{R}^*$ 为幂的反演是一个映射 $i=i_{c,\alpha}:X\backslash c\to X\backslash c$，定义为 $i(x)=\frac{\alpha}{\|x\|^2}\cdot x$，其中 X 已在 c 点向量化．

10.8.1.1　显然 $i^2=\mathrm{Id}_{X\backslash c}$．仅当 $\alpha>0$ 时才有不动点，而且不动点形成一个球面 $S(c,\sqrt{\alpha})=\{x\in X:i(x)=x\}$，称为反演球面．凡是满足 $P_cS=\alpha$ 的球面 S 都是在 $i_{c,\alpha}$ 作用下稳定的，这可从 10.7.10 立即推导得出．当 Y 是 X 的含极点 c 的子空间时，$Y\backslash c$ 也是稳定的，并且有遗传性：在 Y 内，$i|_{Y\backslash c}$ 也是以 c 为极点而且有相同的幂的反演．

10.8.1.2　我们有

$$i_{c,\alpha}\circ i_{c,\beta}=H_{c,\alpha\beta^{-1}}|_{X\backslash c}.$$

18.8.1.3　对于 $x,y\in X\backslash c$，有 $i(x)i(y)=|\alpha|\frac{xy}{cx\cdot cy}$．只要把 X 在 c 点向量化，再作一些计算就能得到此公式．

10.8.2　球面与超平面的变换．设 $i=i_{c,\alpha}$ 是 X 内反演，则任意一个不含 c 的超平面 H 的像 $i(H)$ 是去掉一点后的球面 $S\backslash c$，其中 S 是 X 中过 c 点的球面．反之，设 S 是过 c 点的球面，则 $S\backslash c$ 的像是不含 c 的超平面．不含 c 的球面在 i 下的像仍是不含 c 的球面．

由于 10.8.1.2 的公式，作适当位似变换后可以假设 $\alpha=ch^2$，其中 h 是 c 在 H 上的正交射影．如果令 $i(x)=x'$，$x\in H$，并在 X_c 内计算：

$$x \in H \Longleftrightarrow (x|h) = \|h\|^2, \text{ 不过 } x = \frac{\|h\|^2 x'}{\|x'\|^2},$$

因此

$$x \in H \Longleftrightarrow (x' - h|x') = 0,$$

这相当于 x' 属于以 $[c, h]$ 为直径的球面. 如果 S 是不含 c 的球面, $P_c S = \alpha$, 则据 10.8.1.1 有 $i(S) = S$. 在一般情形下, 通过应用 10.8.1.2 以及作一个适当的位似变换可转化为上述情形.

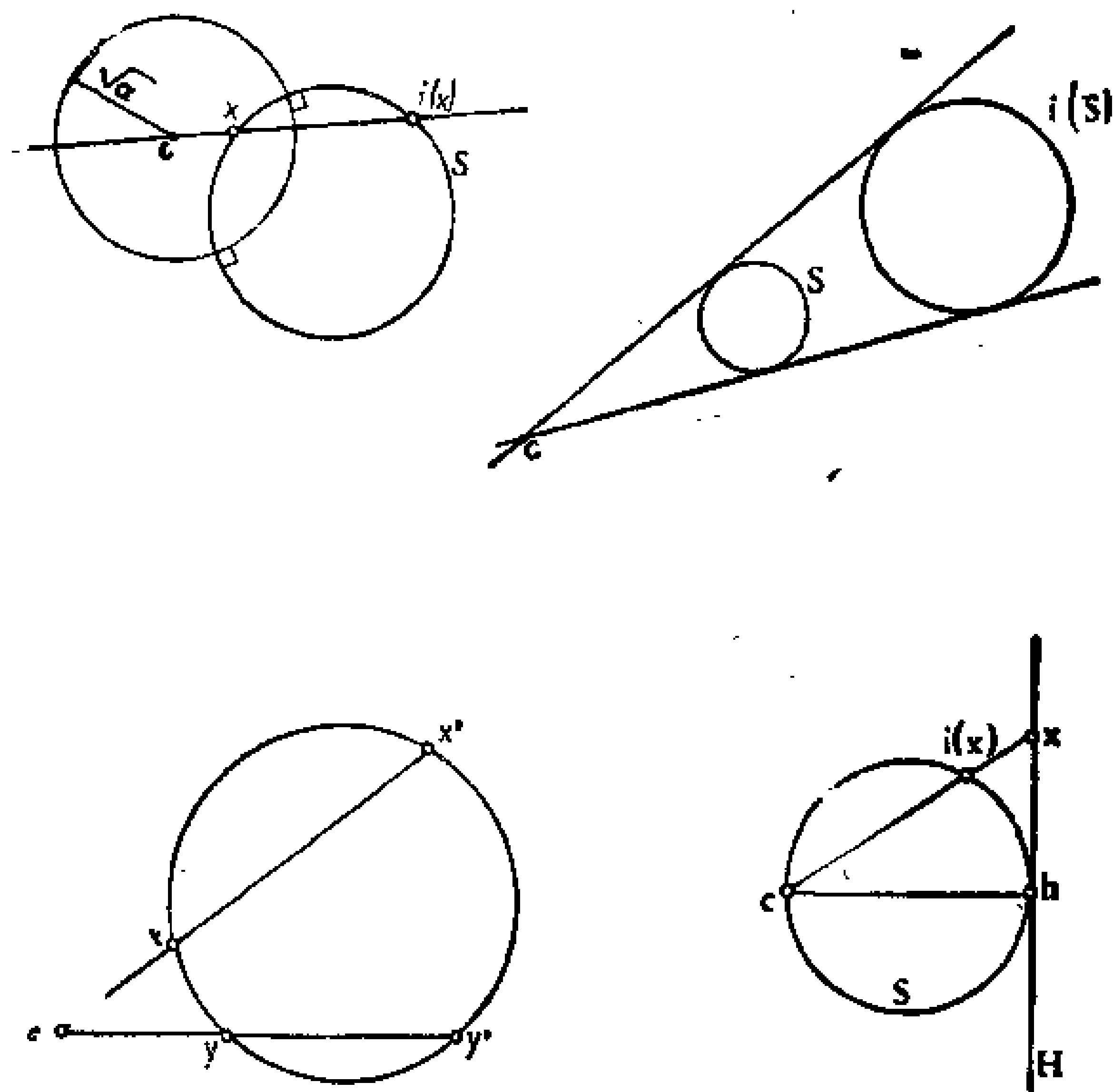


图 10.8.

10.8.2.1 附注. 对"保持球面"的映射的研究, 请参看 9.5.3.2, 9.5.3.6, 18.10.4.

10.8.3 反演器. 这是实现反演变换的机械装置. 其意义在于利

用 10.8.2 的性质把圆周运动转化为直线运动．我们知道从机械上说圆周运动是易于实现的(如圆规、摇手柄等)．但在自然界，直线并非如此易于实现．譬如说为了造一把直尺，必须用好几把直尺作相互研磨才行． 请读者证明图10.8.3.1 及 10.8.3.2 的机械确实是反演器：其中 c 点固定，而另一些点是活动的．至于其它的关节装置请参看 [LB1] 第 64—88 页．也可参看 9.14.34.3.A．

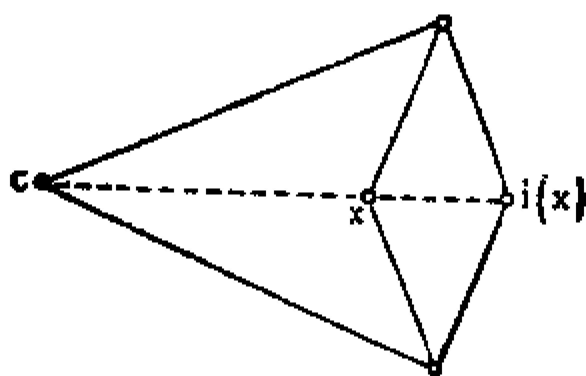


图 10.8.3.1.

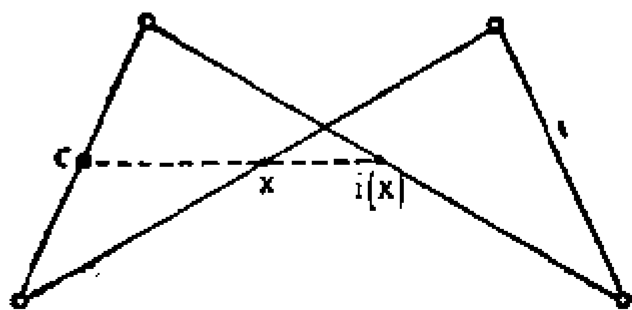


图 10.8.3.2.

10.8.4 演变． 这是群论中的内自同构的几何名称． 其结果如下所述：设 g 是一个反演，f 是以 S 为反演球面(见 10.8.1.1)的反演或者是一个超平面对称 σ_S，则 gfg^{-1} (称为 f 被 g 演变)如下：当 $g(S)$ 是超平面时，gfg^{-1} 是对称 $\sigma_{g(S)}$；当 $g(S)$ 是球面时，gfg^{-1} 是以 $g(S)$ 为反演球面的反演．

10.8.4.1 我们利用以下的判则：两个点 x，x' 在以 S 为反演球面的反演下互逆或者在对称 σ_S 下互相对称的充要条件是一切过 x 与 x' 的球面都与 S 正交(把球面与超平面正交定义为超平面通过球面中心)． 这个判则来源于 10.7.10.2．只要我们知道反演

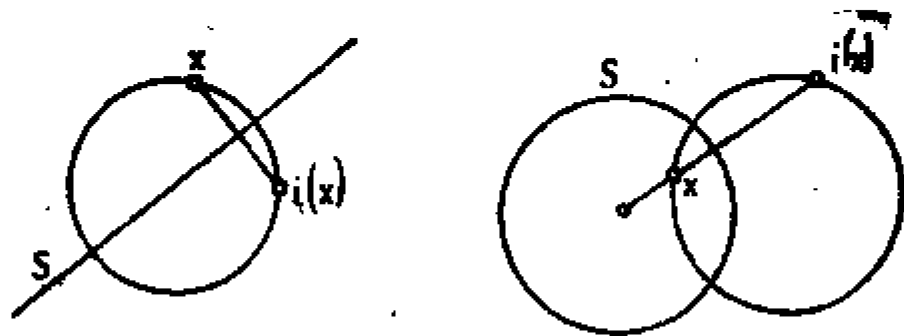


图 10.8.4.

把正交的球面或平面变换成正交的球面或平面，这个判则的证明就不难得出了．而上述结论可从 10.8.5.3 得出．

10.8.4.2 附注．读者可能注意到两件事：首先是需要一种累赘的语言，每次都需说"球面或超平面"．其次，10.8.4 是不正确的，这是指 gfg^{-1} 不是到处都有定义，需要除去对应于 f 和 g 的极点的两个点．正因这两个理由，我们感到需要有一个把球面与超平面统一起来的结构，并使超平面对称与反演的构成不受限制．这将是第 20 章的目的之一．

10.8.5 反演与微分几何．设 $i = i_{c,\alpha}$ 并且在 X_c 内计算，则 $i: X\backslash c \to X\backslash c$ 是 C^∞ 微分同胚．它的导数是：

10.8.5.1 $$i'(x)(y) = \frac{\alpha}{\|x\|^2}\left[y - 2\left(\frac{x}{\|x\|^2}\middle| y\right)x\right].$$

这可从 i 的定义公式及微分法则得到(参见 [CH1])．

10.8.5.2 推论(反演保持交角)．如果 $i_{c,\alpha}$ 是 n 维空间 X 的反演，则在任意一个点 $x \in X\backslash c$ 处，其导数 $i'(x)$ 是一个相似变换，当 $\alpha^n < 0$ 时，这个相似变换是正向的，当 $\alpha^n > 0$ 时，是逆向的特别，这个导数总是保持直线的交角及定向直线的交角，并且当 X 是平面时，对于定向角来说总要改变符号．

事实上，10.8.5.1 表明 $i'(x)$ 是由关于向量超平面 $x^\perp$ 的对称(见 8.2.10) 以及位似比为 $\alpha/\|x\|^2$ 的位似变换所合成．这只需应用 8.8.5 就能得出．

10.8.5.3 作为特例，反演变换保持角度，因此保持球面以及超

平面的正交性．我们当然可以不用微分学而直接证明．

10.8.5.4 附注． 在 9.5.4.6 (Liouville 定理)中，我们已找出了使导数为相似变换的一切微分同胚．

10.8.5.5 反演与密切圆． 如果 i 是以 c 为极点的反演，f 是平面 X 的 C^2 类曲线，则当 $c \notin C$ 时，f 在 $f(t)$ 处的密切圆 C 的像 $i(C)$ 是 $i\circ f$ 在 $i(f(t))$ 处的密切圆．事实上 i 保持圆，并且密切圆是过曲线上相邻三点的圆的极限．

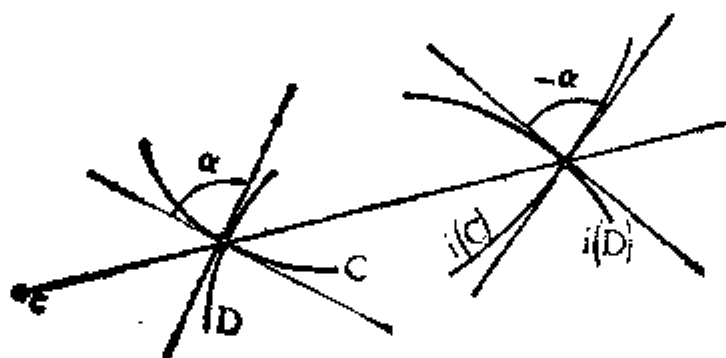


图 10.8.5.2.

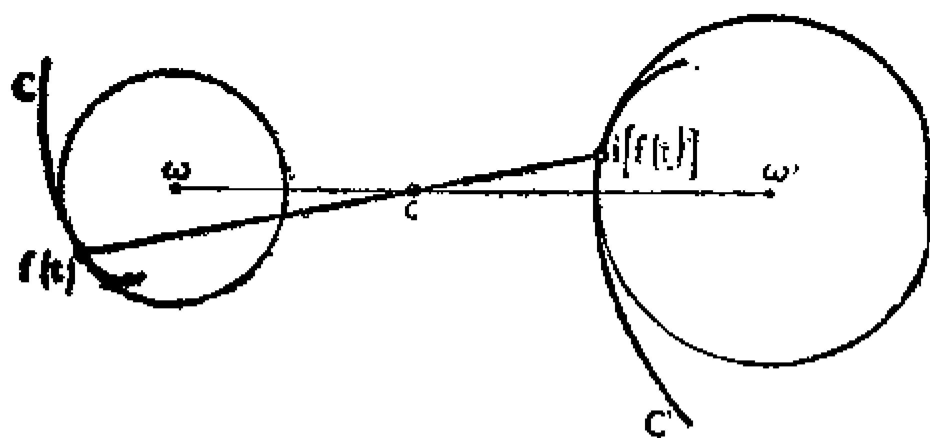


图 10.8.5.5.

10.8.5.5 的有趣的推论如下所述：球面上简单闭曲线的挠率至少在四个点上等于零．为此请参看 [B-G] 第 364 页．除此之

外，前面所述的结果也提供了已知曲线 C 的曲率中心 ω 后求出其反演像 C' 的曲率中心 ω' 的作图法.

10.8.5.6 参见 [BA-WH].

在 10.9 和 10.10 节，我们都在平面内讨论.

10.9 平面上的圆

这是除了平面内直线的几何外最简单的几何. 甚至还可说比直线更简单，因为圆轨比直尺更现成(参见 10.8.3). 我们只能提到大量结果中的一部分. 基本工具只有三个：幂、反演及定向角(见 8.7). 10.9.5 是定向角的主要应用.

10.9.1 记号与约定. 对于两个不同的点 x, y, 在本章的最后几节把它们的连线记为 $\langle x, y\rangle = \overline{xy}$. 如果 $x = y$ 但行文中已指明 x 属于圆 C 时，$\overline{xx}$ 就指 C 在 x 点的切线 T_xC.

基本论题是研究 X 的四个点 x, y, z, t 的共圆性. 第一个判则纯粹是度量上的:

10.9.2 命题 (Ptolémée 定理). 对于平面上四个点 $(x_i)(i=1, 2, 3, 4)$，记它们的相互距离为 $d_{ij} = x_ix_j$，则有 $d_{12}d_{34} \leqslant d_{13}d_{42} + d_{14}d_{23}$，并且当等式成立时，这四个点或共圆或共线. 要使平面上四个点为共圆的充要条件是以下三个等式之一成立:

$$\pm d_{12}d_{34} \pm d_{13}d_{42} \pm d_{14}d_{23} = 0.$$

这已在 9.7.3.8 被证. 但能给一个更初等的证明也是不错的. 令 $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = c$，设 i 是以 c 为极点、幂为 1 的反演. 对 $x' = i(x)$, $y' = i(y)$, $z' = i(z)$，据 10.8.1.3 有:

$$x'y' = \frac{xy}{cx\cdot cy},\quad y'z' = \frac{yz}{cy\cdot cz},\quad z'x' = \frac{zx}{cz\cdot cx}.$$

从而

$$\begin{aligned} &cz\cdot xy + cx\cdot yz - cy\cdot zx \\ &\quad = (cx\cdot cy\cdot cz)(x'y' + y'z' - x'z'), \end{aligned}$$

如果注意到在共线三点中必有一点在另两点的中间，从 9.1.1.1 及 10.8.2 就能推导出所需结论.

10.9.2.1 附注. Ptolémée 关系式曾被他用来构造一个"绳桌". 事实上，如果 x, z 是圆的直径，则公式 $xz\cdot yt=xy\cdot tz+xt\cdot yz$ 恰好化为三角公式 $\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\sin b\cdot\cos a$（见 8.7.8.1 及 10.3.2）. 也可参见 9.7.3.8.

10.9.2.2 不过最有用的共圆条件是利用定向角. 我们这里使用 8.7 及 10.9.1 的记号. 以下的命题当某些点重合时仍然有效. 我们只给出一般情形下的证明，把特殊情况留给读者验证. 其思想就是利用切线与半径正交这一特性.

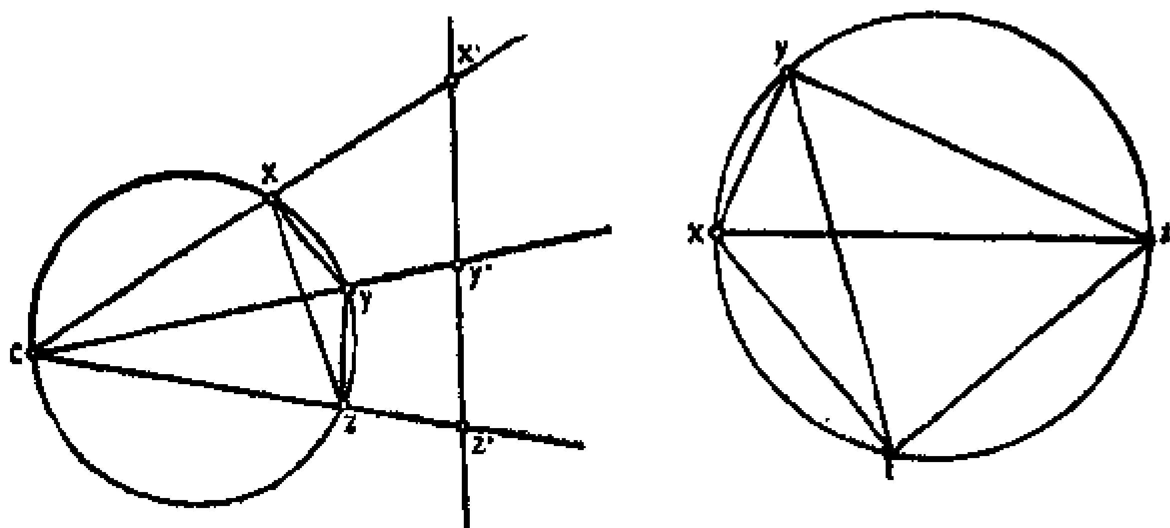


图 10.9.2.

10.9.3 命题（圆周角）. 设 C 是以 ω 为中心的圆，a, b 是 C 上两点，则对任意的 $x\in C$ 有

$$\widehat{\overrightarrow{\omega a},\overrightarrow{\omega b}}=2\,\widehat{\overline{xa},\overline{xb}}\qquad（见 8.7.7.7）.$$

设 x' 是 x 的中心对称点，据 8.7.2.4(4)，只需证

$$\widehat{\overrightarrow{\omega a},\overrightarrow{\omega x'}}=2\,\widehat{\overrightarrow{xa},\overrightarrow{xx'}},$$

设 D 是 $\{x, a\}$ 的垂直平分线，σ_D 是关于 D 的对称. 由 8.7.2.4(5) 可得:

$$\widehat{\overrightarrow{\omega a},\overrightarrow{\omega x'}}=\widehat{\overrightarrow{\omega a},\overrightarrow{xa}}+\widehat{\overrightarrow{xa},\overrightarrow{\omega x'}}=\widehat{\overrightarrow{xa},\overrightarrow{x\omega}}$$

$$+\widehat{\overrightarrow{xa},\ \overrightarrow{x\omega}}=2\widehat{\overline{xa},\ \overline{x\omega}}.$$

10.9.4 推论. 设 $a, b\in X$, $a\neq b$, $\alpha\in\mathfrak{A}(\bar{X})\backslash 0$, 则 $\{x\in X:\widehat{\overline{xa},\overline{xb}}=\alpha\}$是过 a, b 两点的圆.

10.9.5 推论. X的四个点为共圆或共线的充要条件是

$$\widehat{\overline{ca},\ \overline{cb}}=\widehat{\overline{da},\ \overline{db}}.$$

事实上当 a, b 已知时很容易作出点 ω 使 $\omega a=\omega b$ 并且

$$\widehat{\overrightarrow{\omega a},\ \overrightarrow{\omega b}}=2\alpha.$$

例如可取 ω 为 $\{a, b\}$ 的垂直平分线与一条过 a 且使 $\widehat{\overline{ab},D}=\delta-\alpha$ 的直线D的交点（参见 8.7.7.4）. 设C是以 ω 为圆心且过 a, b 两点的圆,则对 $x\in C$, 有

$$\widehat{\overline{xa},\ \overline{xb}}=\alpha.$$

反之，如 $\widehat{\overline{xa},\ \overline{xb}}=\alpha$, 则过 a, b, x 三点的圆的中心 ω' 满足

$$\widehat{\overrightarrow{\omega' a},\ \overrightarrow{\omega' b}}=2\alpha,$$

因此只能是 ω.

当 a, b, c 共线时,第二个推论是显然的,可参见 8.7.7.3. 当

$$\widehat{\overline{ca},\ \overline{cb}}\neq 0$$

时,可从前面的讨论推出.

10.9.6 注. 条件 10.9.5 对于非定向角不成立. 从非定向角的观点看, a, b, c, d 共圆可导致

$$\overline{\overline{ca},\ \overline{cb}}=\overline{\overline{da},\ \overline{db}}\ \text{或}\ \overline{\overline{ca},\ \overline{cb}}+\overline{\overline{da},\ \overline{db}}=\pi,$$

但其逆不成立. 因此 10.9.5 有它的好处，特别当涉及到复杂图形时，需要分别考虑的各种情形实在太多了. 也请参看 10.13.15.

请注意当 $\alpha=\delta$ 时,这就是以 a, b 为直径的圆.

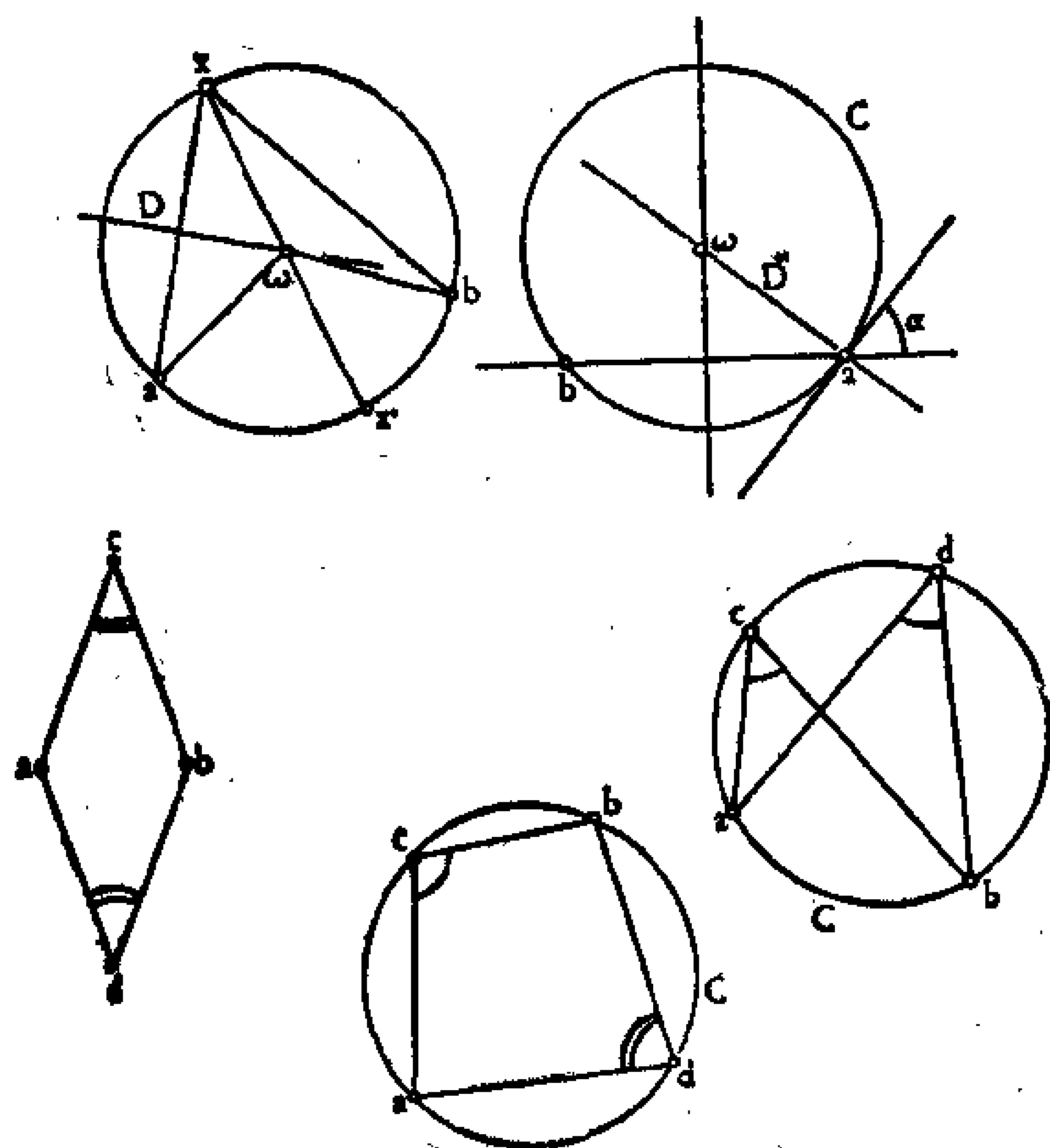


图 10.9.5.

10.9.3 及 10.9.5 亦将作为 17.4.2 关于圆锥曲线的一般定理的特例被证明.

10.9.7 例. 10.9.5 的应用是相当多的.建议读者考虑练习 9.14.3, 10.13.18, 并浏览参考文献 [D-C1], [D-C2], [I-R], [R-C1], [HD1], [R-C2], [HD2] 中的练习.我们只探讨其中两个.首先是 Simson 直线, 它已在 10.4.5.4 中出现过 (也请参看 9.14.34.3.D), 10.4.5.5, 10.9.7, 10.11.3, 10.13.27, 14.4.3.5, 17.8.3.2).

10.9.7.1 设 $\{a, b, c\}$ 是一个三角形. 点 x 在三边的射影

p, q, r 共线的充要条件是它们在 $\{a, b, c\}$ 的外接圆上.

关于这一类证明,我们往往借助于图形得到一系列相等的角,然后可写出如下的定向角: 由于 $\widehat{\overline{pc}, \overline{px}} = \delta = \widehat{\overline{qc}, \overline{qx}}$ 以及

$$\widehat{\overline{qa}, \overline{qx}} = \delta = \widehat{\overline{ra}, \overline{rx}},$$

把 10.9.5 使用四次后可得

$$\widehat{\overline{cb}, \overline{cx}} = \widehat{\overline{cp}, \overline{cx}} = \widehat{\overline{qp}, \overline{qx}}$$

以及

$$\widehat{\overline{ab}, \overline{ax}} = \widehat{\overline{ar}, \overline{ax}} = \widehat{\overline{qr}, \overline{qx}}.$$

而"p, q, r 共线"等价于 $\widehat{\overline{qr}, \overline{qx}} = \widehat{\overline{qp}, \overline{qx}}$. 由上面等式可以导出 $\widehat{\overline{cb}, \overline{cx}} = \widehat{\overline{ab}, \overline{ax}}$, 根据 10.9.5, 这就是"$a, b, c, x$ 共圆"的条件.

长久以来这个"Simson 直线"定理被错误地归功于 Simson, 其实它是属于 Wallace 的.

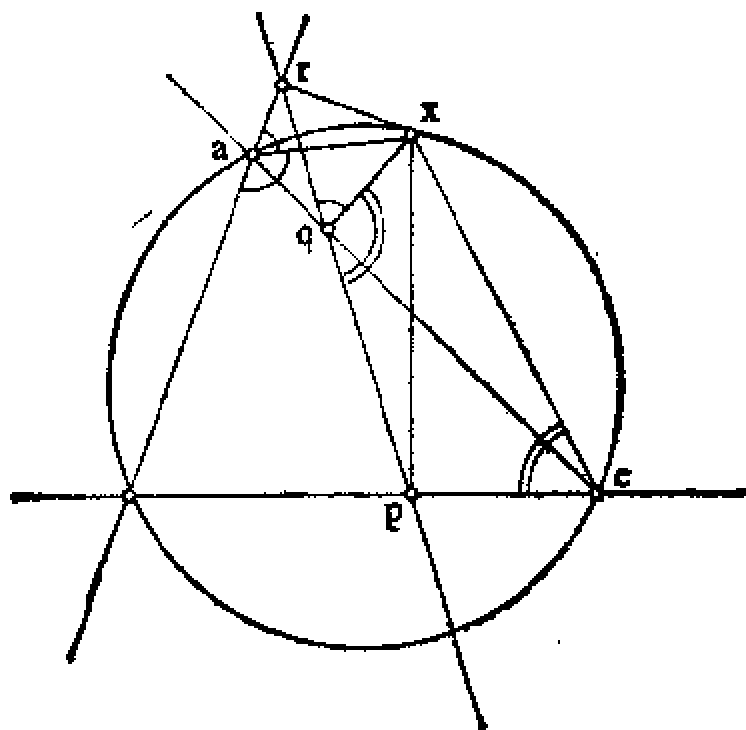


图 10.9.7.1.

10.9.7.2 六圆定理或 Miguel 定理. 设有四个圆 $C_i(i=1,2,3,4)$ 使得 $C_1\cap C_2=\{a,a'\}$, $C_2\cap C_3=\{b,b'\}$, $C_3\cap C_4=\{c,c'\}$, $C_4\cap C_1=\{d,d'\}$, 则 a,b,c,d 共圆的充要条件是 a',b',c',d' 共圆.

利用 Chasles 关系式及四次运用 10.9.5, 可得

$$\widehat{\overline{ba},\overline{bc}}=\widehat{\overline{ba},\overline{bb'}}+\widehat{\overline{bb'},\overline{bc}}=\widehat{\overline{a'a},\overline{a'b'}}+\widehat{\overline{c'b'},\overline{c'c}}$$

$$\widehat{\overline{da},\overline{dc}}=\widehat{\overline{da},\overline{dd'}}+\widehat{\overline{dd'},\overline{dc}}=\widehat{\overline{a'a},\overline{a'd'}}+\widehat{\overline{c'd'},\overline{c'c}}.$$

相减后再利用 Chasles 关系式:

$$\widehat{\overline{ba},\overline{bc}}-\widehat{\overline{da},\overline{dc}}=\widehat{\overline{a'd'},\overline{a'b'}}-\widehat{\overline{c'd'},\overline{c'b'}}.$$

从 10.9.5 就能到到所需结论.

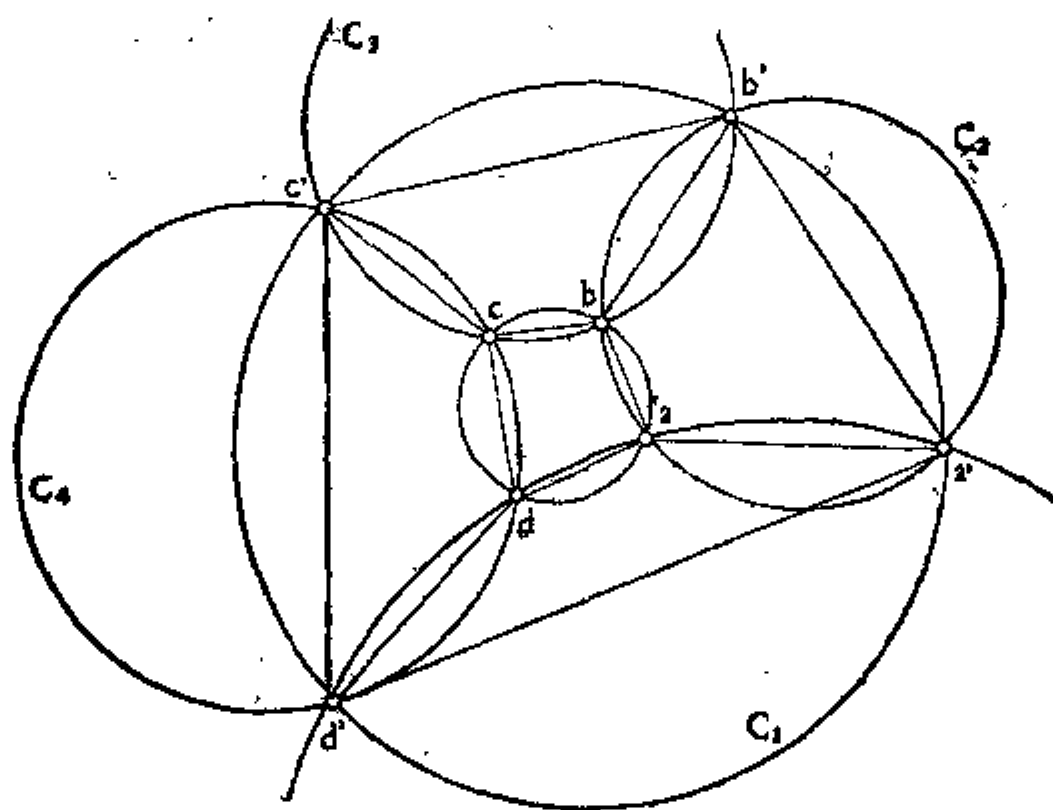


图 10.9.7.2.

10.9.7.3 注. Miguel 定理是一个"定理链"的第一个定理,请参看 10.13.19. 关于定理链请参看 [PE1] 94.7, 第 431 页以及 [CR1] 的第 262 页和 258 页. 也请参看 10.11.7.

10.10 圆　束

从幂的性质很易得到以下结果(参见 10.7.10).

10.10.1 设 C, C' 是两个不同心的圆. 圆的集合 $\mathscr{F}=\{$圆 Γ: $\Gamma\perp C$ 且 $\Gamma\perp C'\}$ 中的任意两个元素都有相同的根轴，就是过 C 和 C' 的中心 ω 及 ω' 的直线 $\langle\omega, \omega'\rangle$. 如 $\mathscr{F}$ 这样定义的圆的集合都称为一个圆束. 如果 Γ 和 Γ' 属于一个圆束 $\mathscr{F}$，则新的圆束 $\{$圆 C: $C\perp\Gamma$ 且 $C\perp\Gamma'\}$ 记为 $\mathscr{F}^{\perp}$ 并称为 $\mathscr{F}$ 的正交束. 我们有 $C\perp\Gamma\forall C\in\mathscr{F}^{\perp}\forall\Gamma\in\mathscr{F}$. 并且 $\mathscr{F}^{\perp\perp}=\mathscr{F}$. 如果 C, C' 是相切的，则 $\mathscr{F}$ 中的圆也互切，$\mathscr{F}^{\perp}$ 中的圆也互切. 如果 $C\cap C'=\emptyset$,

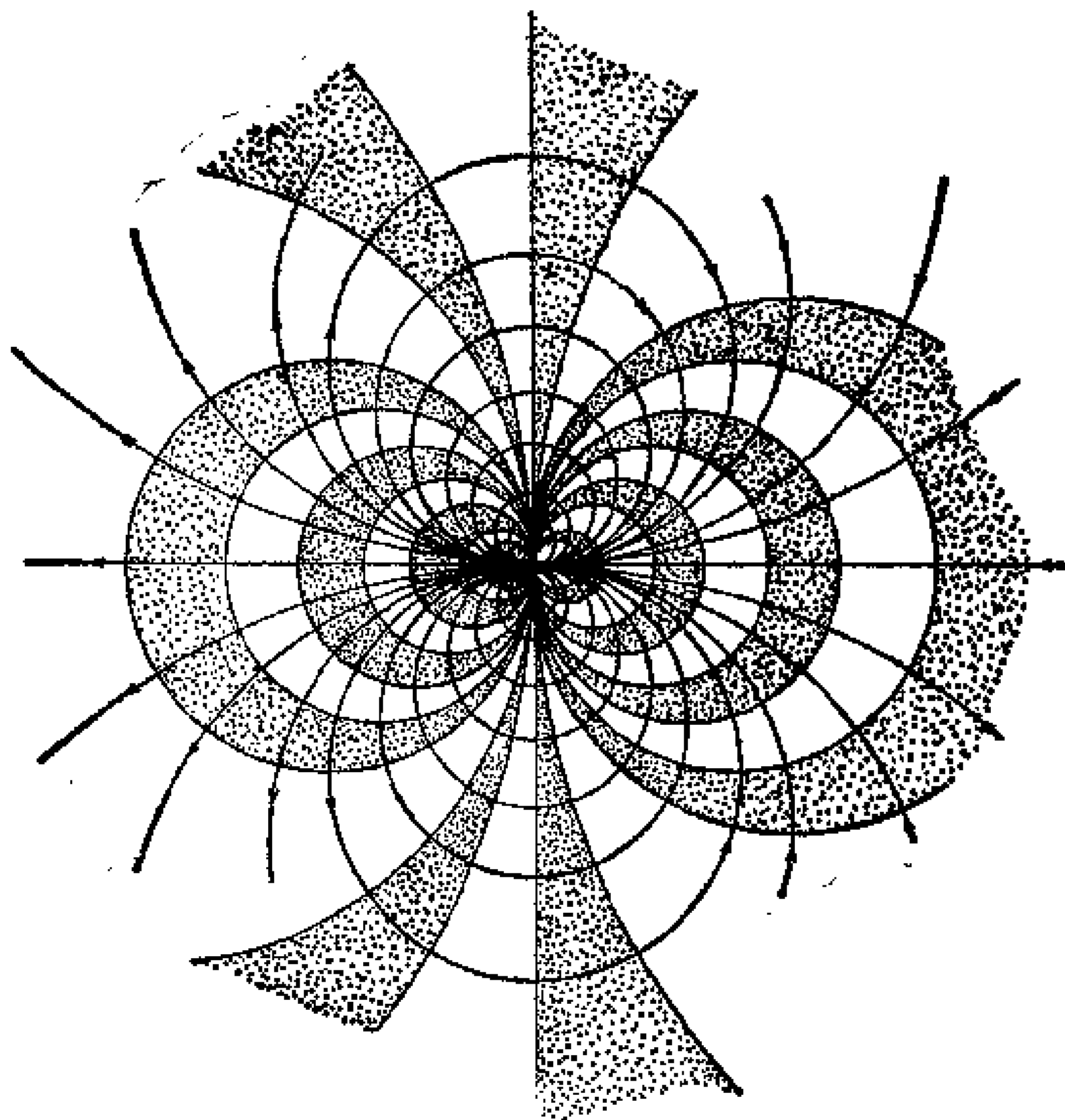


图 10.10.1.1.

则（在 $\langle\omega, \omega'\rangle$ 上）存在两个点 x, y 使 $\mathscr{F}^{\perp} = \{$圆 $C: x, y \in C\}$. 点 x, y 称为 $\mathscr{F}$ 的极限点. 如果 $C \cap C' =$ 两个不同的点，则 $\mathscr{F}$ 由互不相交的圆组成.

在第 20 章还会重新遇到圆束.

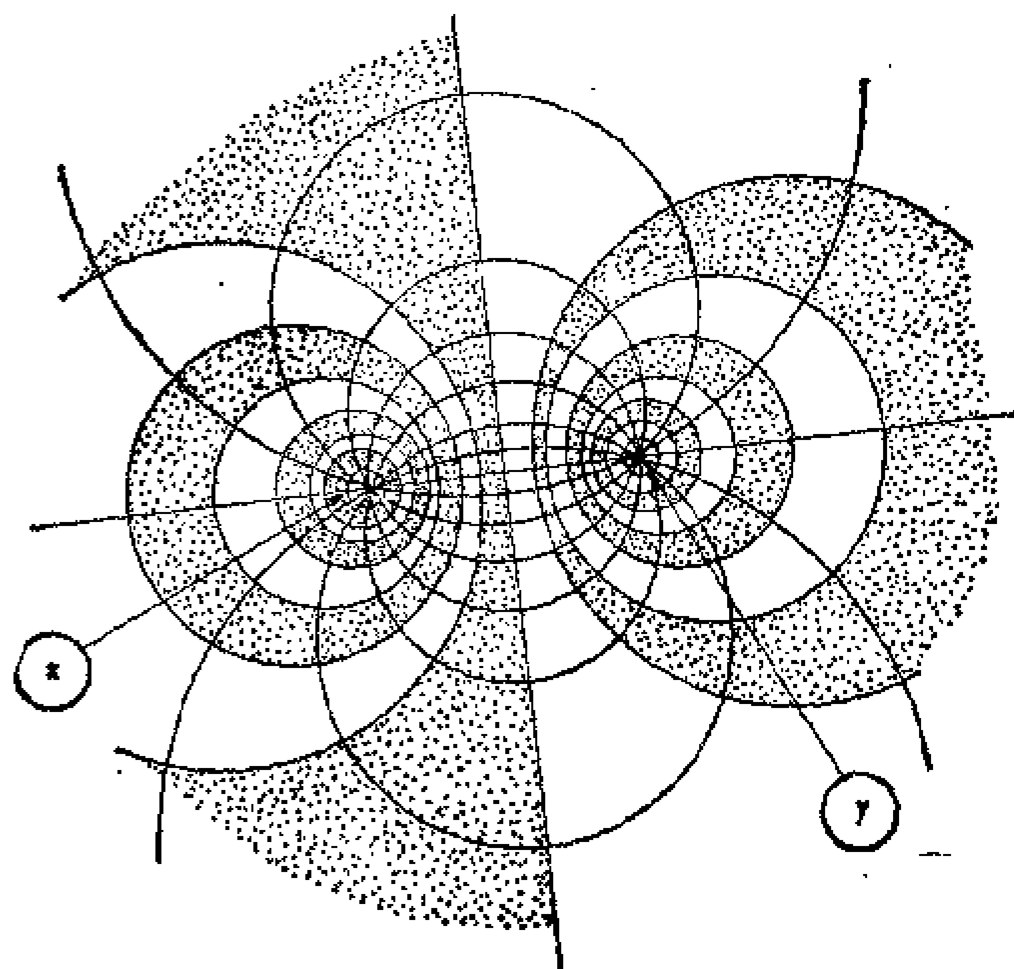


图 10.10.1.2.

10.10.2 两个圆的约化图形. 上一小节的内容以及反演变换的用处之一是：设 C, C' 是两个圆，则总有一个反演把它们变换成两条直线或两个同心圆.

事实上如果 $C \cap C' \neq \emptyset$，我们把反演的极点取在 $C \cap C'$ 内，如果 $C \cap C' = \emptyset$，则可把前述的极限点之一取成极点. 由于反演保持正交性（见 10.8.5.3），因此第二个极限点的反演像具有下述性质：过这个点的直线都与两个圆的反演像正交，这仅当像点是像圆的公共中心时才有可能做到.

10.10.2 的结果使我们能解决很多关于圆的问题. 譬如说：研

究与两个圆相割成等角的圆，或作一个圆使它与三个圆交成三个已知角等等。只要所加的条件在反演下仍然保持就行了。我们再用更深刻的方式表述前面的结果：两个同心圆所成的集合有一个相当大的稳定子群 G，因为 G 由一切使公共圆心不动的等距变换组成。同样可知由两条相交直线构成的集合在以它们的交点为中心的位似变换下保持稳定.用反演作演变后，从 G 可得到群 $\hat{G}$，它使最初考虑的两个圆的集合保持稳定，而且 $\hat{G}$ 由保持圆、直线及角的映射所构成。事实上这不再是从 E 到它自身的映射，而是在 20.1 将要引进的 $\hat{E}$ 的映射。引入 $\hat{E}$ 正是为了使前面讨论的内容更加精确化。

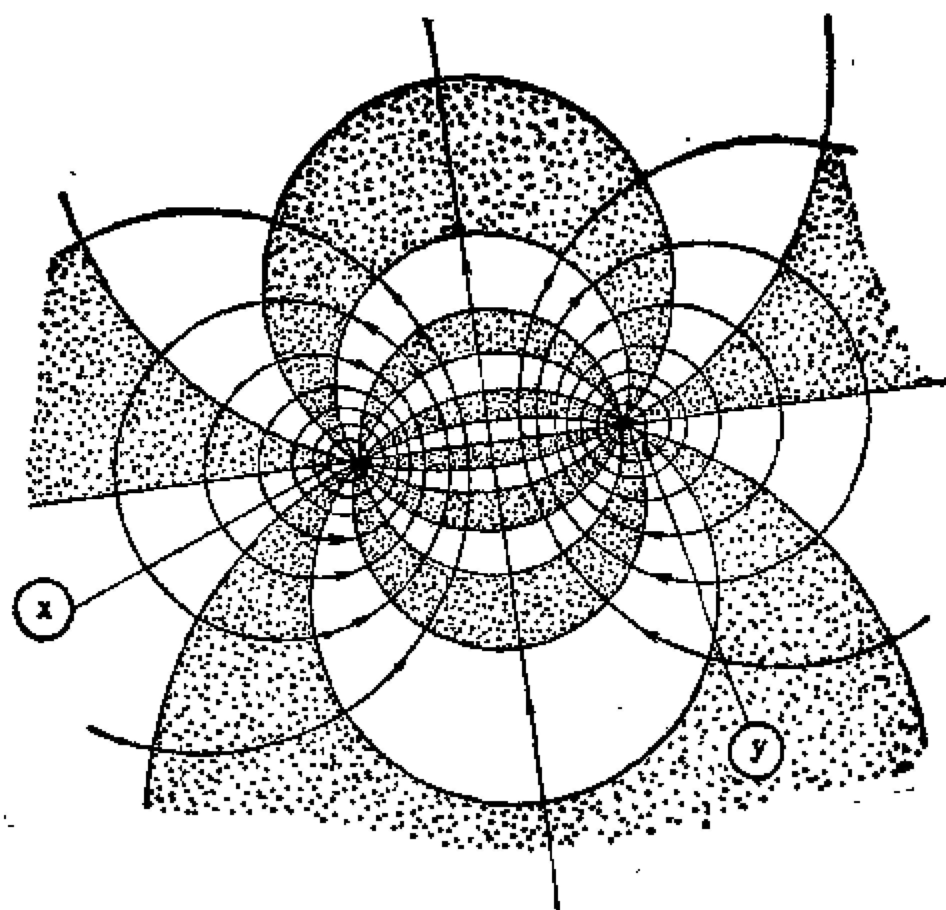


图 10.10.1.3.

现在从一个例子来看 10.10.2 开头部分的应用.

10.10.3 Steiner 互斥性定理. 设 C，C' 是两个圆，C 在 C' 内部，Γ 是外切于 C 又内切于 C' 的圆. 我们用下述方法递推地作出圆链 $\Gamma_i(i=1,2,\cdots)$：使 Γ_{i+1} 与 Γ_i，C 及 C' 都相切，但又异于

Γ_{i-1}. 如果对一切 $i>1$，总有 $\Gamma_i \neq \Gamma$，那是我们运气不好. 但是如果有某一个 n 使得 $\Gamma_n = \Gamma_1$，那么对于任意的一个起点圆 Γ'，总有 $\Gamma'_n = \Gamma'_1$.

只要把 C 和 C' 转换成两个同心圆,其证明就是显然的. 因为一对同心圆关于绕它们公共中心的旋转群是稳定的.

因此互斥性定理就是：或者任意一个链都不封闭，或者任意一个链都封闭. 以下是互斥性的另一个例子.

10.10.4 圆的 Poncelet 大定理. 设有两个圆 C，C'，并且 C 在 C' 的内部（同 10.10.3），则从点 $x_1 \in C'$ 出发可由以下条件作

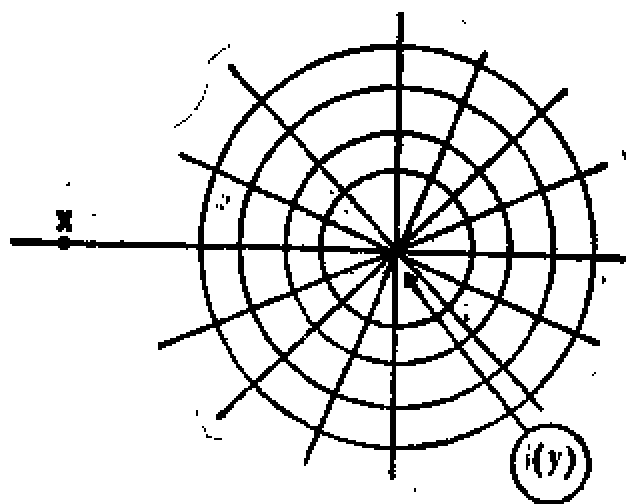


图 10.10.2.

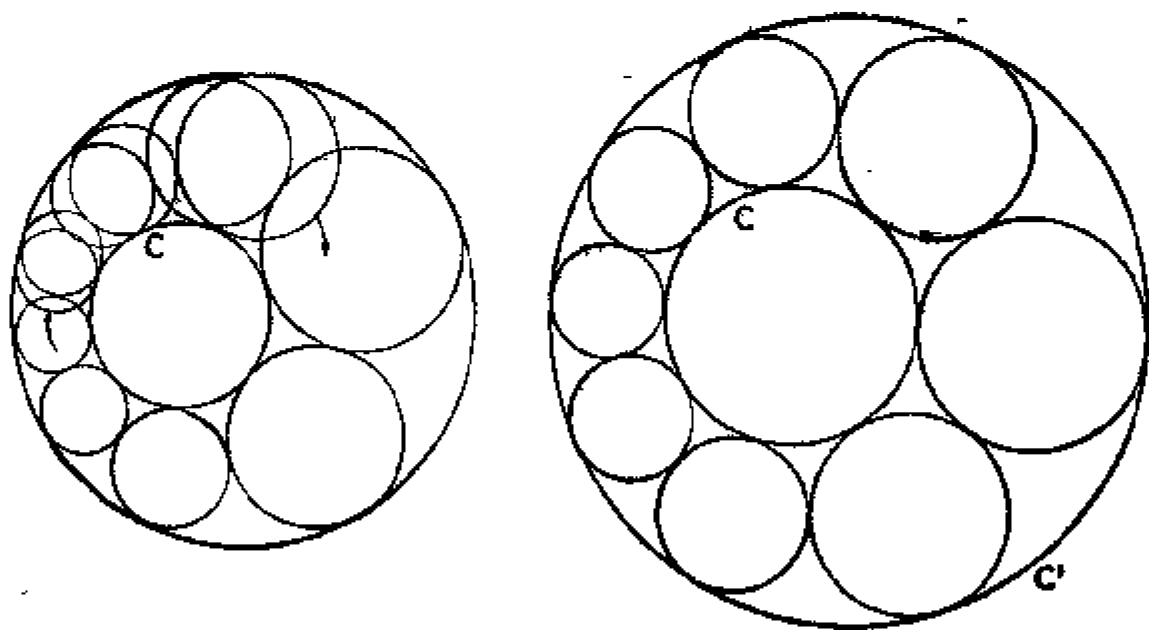


图 10.10.3.

出一连串点 $x_i(i \geqslant 1)$：对一切 i，都有 $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ 与 C 相切并且 $\langle x_i, x_{i+1}\rangle \neq \langle x_i, x_{i-1}\rangle$。则以下两种情况必居其一：或存在 n，使 $x_n = x_1 \forall x_1 \in C'$，或者 $x_i \neq x_1 \forall x_1 \in C'$ 并且 $\forall i \geqslant 1$。

尽管陈述很简单，这个定理要比 Steiner 互斥性定理困难得多。请参看 16.6。

也请参看 10.13.3，17.6.5 及 [B-H-H]。

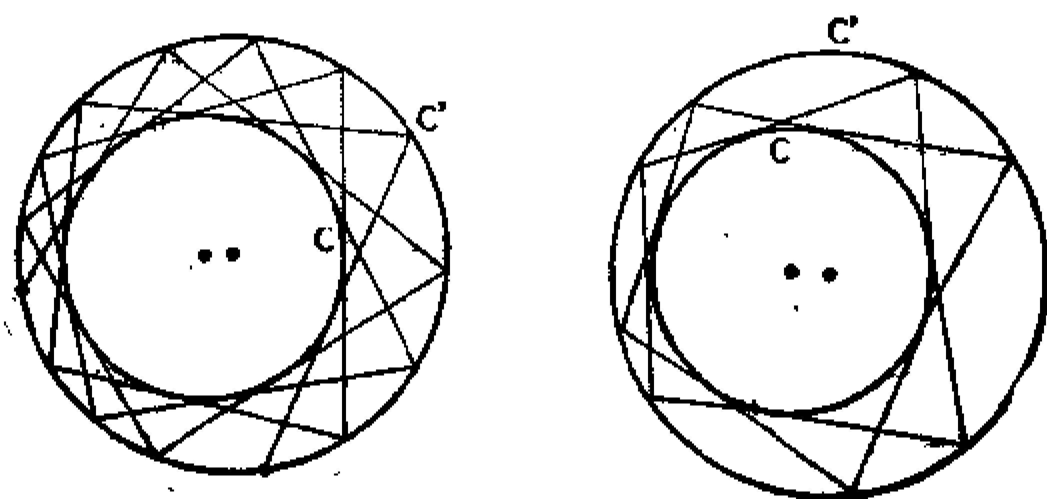


图 10.10.4.

10.11 有关圆的问题

我们要叙述一些关于圆的经典结果。读者可把它们作为练习进行自我测验，有时我们也给出参考文献。

10.11.1 Appolonius 问题. 这就是作一个圆 Γ 与三个已知圆 C，C' 及 C'' 相切。我们在 10.7.9 已知道至多有八个解。最初等的方法是把三个圆的半径减去或加上最小圆的半径，然后再归结为作一个圆使它过一个点并与两个已知圆相切。从 10.10.2 可以看出这是办得到的（必要时也可参看 9.6.6）。Gergonne 给出了一个更漂亮的方法，用它能得到 Γ 与 C，C'，C'' 的三个切点，如图 10.11.2 所示。

在这个图中，点 ω 是 C，C'，C'' 的根心（见 10.7.10.2），即关于三个圆有相等幂的点，这不难用 10.7.10.1 的方法作出。直线 D

是连接 C, C' 或 C', C'' 或 C'', C 间的六个位似中心的四条直线之一(这六个中心恰在四条直线上)，而 γ, γ' 和 γ'' 是D关于 C, C' 与 C'' 的极点(参见 10.7.11). 那么要找的C上的切点就是 C 与直线 $\langle \omega, \gamma \rangle$ 的交点.

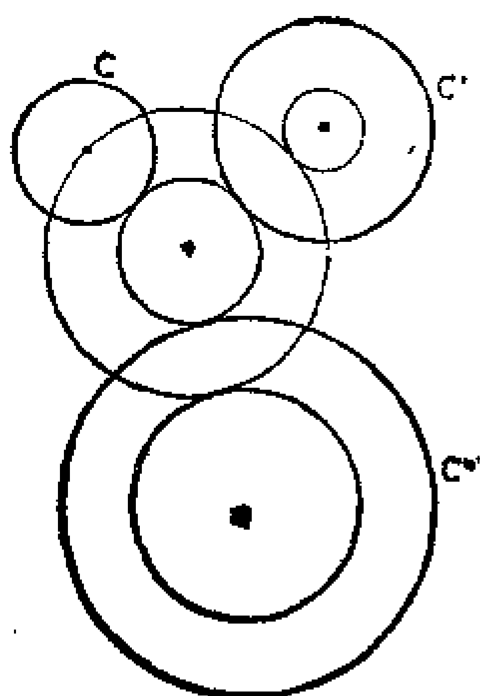


图 10.11.1.

关于 Appolonius 问题的新近的参考文献是 [CR5].

10.11.2 Napoléon-Mascheroni 问题. 只用圆规(参见 10.8.3) 找出已知圆的圆心. 关于这一问题，请参看 [LB1] 第 25 页后面. 也就是 25 页底下的历史注记以及 26 页上对 Mohr-Mascheroni 定理的叙述："凡能用圆规直尺作图的，也能单用圆规作出". [LB1] 的大部分内容读起来像一本小说.

10.11.3 九点圆及 Feuerbach 定理. 设 $\mathscr{C} = \{x, y, z\}$ 是三

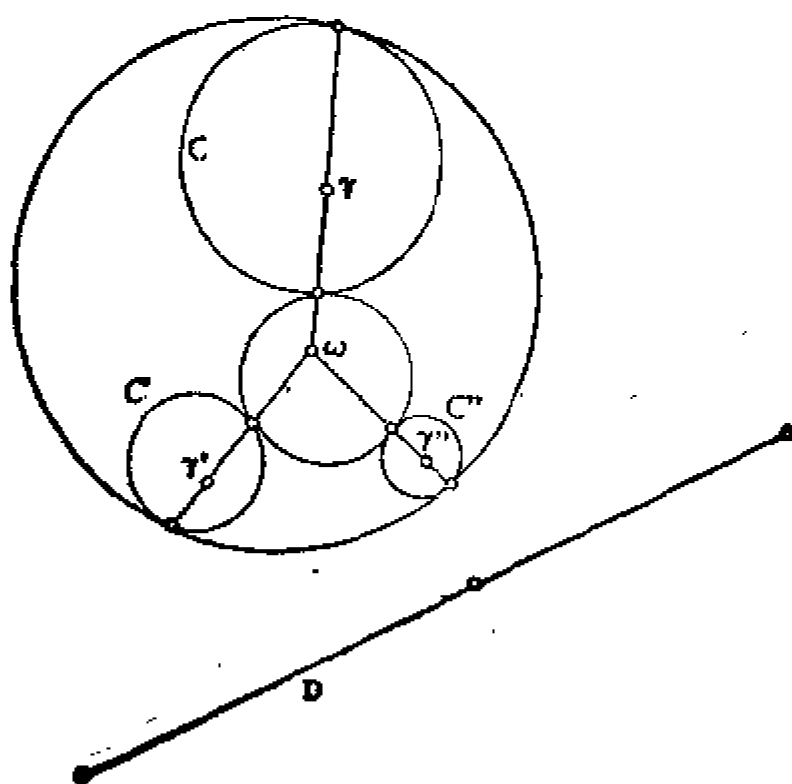


图 10.11.2.

角形，p，q，r 是高的垂足，u，v，w 是边上的中点，l，m，n 是 $\{x, h\}$，$\{y, h\}$，$\{z, h\}$ 的中点，其中 h 是垂心(见 10.2.5)，ω 是 $\mathscr{C}$ 的外接圆中心，g 是重心，则九个点 u，v，w，l，m，n，p，q，r 在同一个圆 Γ 上，并且 Γ 的中心是 $\langle h, \omega\rangle$ 的中点. 此外 g 在直线 $\langle h, 0, \omega\rangle$ 上，$\overrightarrow{gh} = -2\overrightarrow{g\omega}$. 圆 Γ 又与 $\mathscr{C}$ 的内切圆及三个旁切圆相切(参看 10.1.5 及图 10.1.5).

其证明方法是引入以 u 为极点以 $up \cdot us$ 为幂的反演，其中 s 是过 x 的内角平分线与对边的交点. 此外，Γ 与由 $\mathscr{C}$ 的 Simson 直线包络成的有三个尖点的内摆线相切于三点，参见 10.4.5.5，10.9.7.1 及 9.14.34.

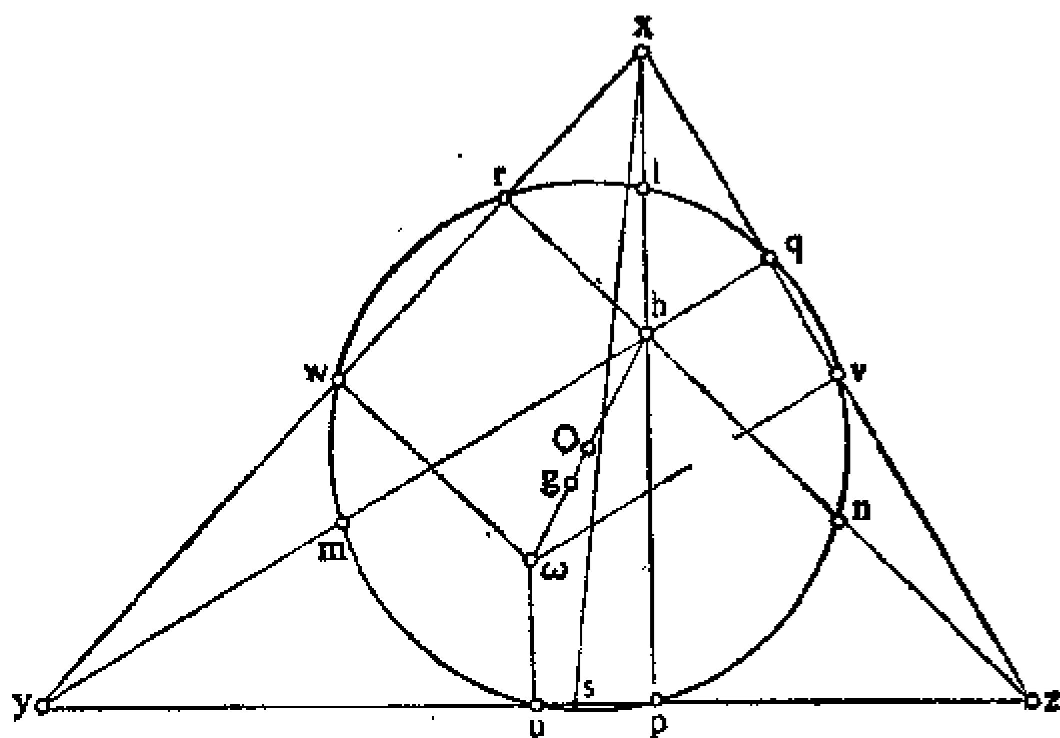


图 10.11.3.

10.11.4 Castillon 问题. 已知圆 C 和不在 C 上的点 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$，要找出 C 的内接多边形 $(z_i)_{i=1,\cdots,n}$ 使得 $x_i \in \langle z_i, z_{i+1}\rangle$ $\forall i=1,\cdots,n$. 有一个相当复杂的解法是作出以 x_i 为极点、使 C 稳定的反演 f_i，然后作这些 f_i 的乘积. 不过要使得 $(f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(z_1) = z_1$，这就归结为寻找 $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ 的不动点. 有一个对所有的圆锥曲线都适用的更好的方法将在 16.3.10.3 给出，也可参看

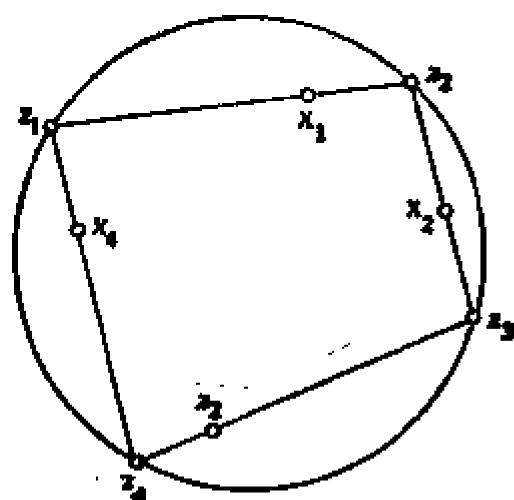


图 10.11.4.

[DO] 第 144 页.

10.11.5 Malfatti 问题. 要在一个已知三角形内作三个圆 C, C', C'', 使它们两两相切并且每个圆又和三角形的两条边相切. 关于这个问题的解请参看 [HD1] 第 310 页或 [RC1] 第 311—314 页或 [DO] 第 147 页.

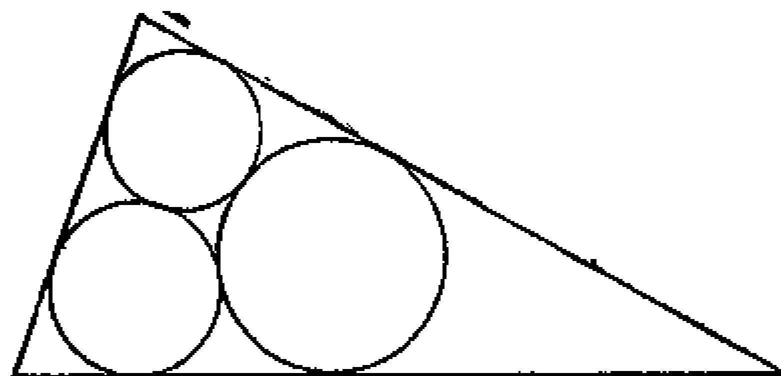


图 10.11.5.

10.11.6 Laguerre 循环. 这是有关定向直线及定向圆的理论, 读者可在 [PE1] 第 426 页找到其介绍.

关于这个理论的代数形式可参看 [BZ] 第 251 页起, 也可参看 [BLA3] 第 4 章.为了勾画其大致轮廓,我们用图 10.11.6.1 及 10.11.6.2 表示一个关于定向直线及定向圆的结果, 这些定向直线及定向圆相切并在切点处保持定向. 如果给出的图形无法在切点处保持定向,则上述结论不成立.

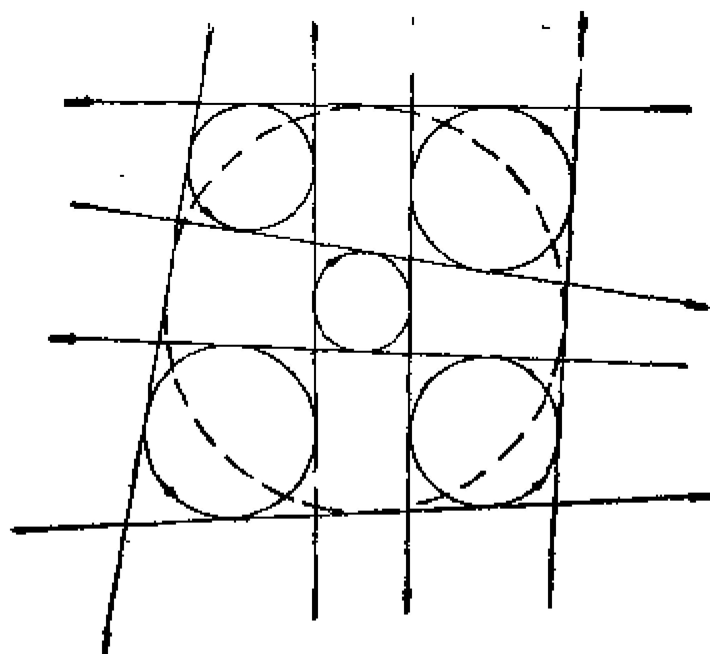


图 10.11.6.1.

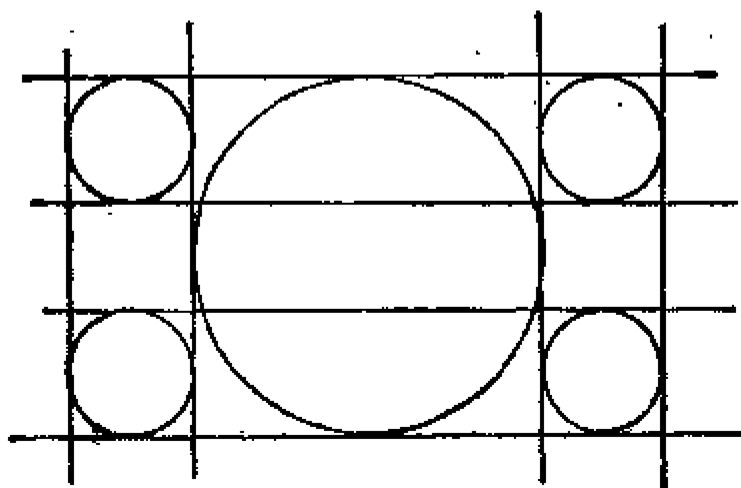


图 10.11.6.2.

10.11.7 七圆定理. 关于这个有趣的结果请参看 C. J. A. Evelyn, G. B. Money-Coutts, J. A. Tyrell 的书《七圆定理》, 由 CEDIC 出版.

10.12 挠平行性:第 18.9, 20.5, 20.7 节的先导

这里涉及到通常空间(即三维空间)中的圆及球面的一系列出乎意料的现象. 对这类现象将用两种方式来解释: 第 18.9 节用几何方法,第 20.5.4 节用代数方法.

10.12.1 设T是一个环面，即由一个圆绕着与它共面但不相交的直线旋转所成的曲面。这个环面有两族圆：经圆及纬圆。第一个使人惊奇的事实是T还含有别的圆，这些圆有时被数学家称为 Villarceau 圆，不过在他以前（1848 年）早已被人所知晓。譬如说当你到斯特拉斯堡去参观圣母事迹博物馆时，就可证实这一点：在螺旋梯柱子的上部装饰着一个雕花环面，其棱脊就是这样的圆。我们也可用一个两处与T相切的平面截出这些圆，见图 10.12.1.3.

10.12.2 这些奇特的圆可分为两族：$\{C(t)\}$ 及 $\{\Gamma(\theta)\}$。两个 $C(t)$ 及 $\Gamma(\theta)$ 总是相交于两个点。两个不同的 $C(t)$ 及 $C(t')$（相应地：$\Gamma(\theta)$ 及 $\Gamma(\theta')$）不仅不相交，而且还是相互交织的(关于交织，参看 B-G] 第 279 页)，从斯特拉斯堡的雕刻环面就能看到它们的交织.

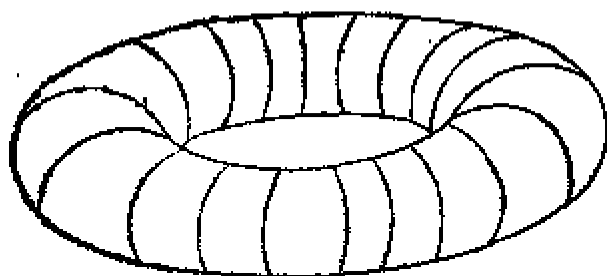


图 10.12.1.1.

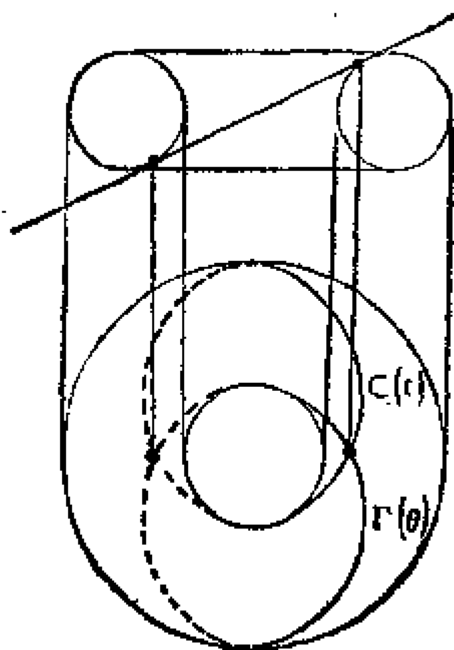


图 10.12.1.3.

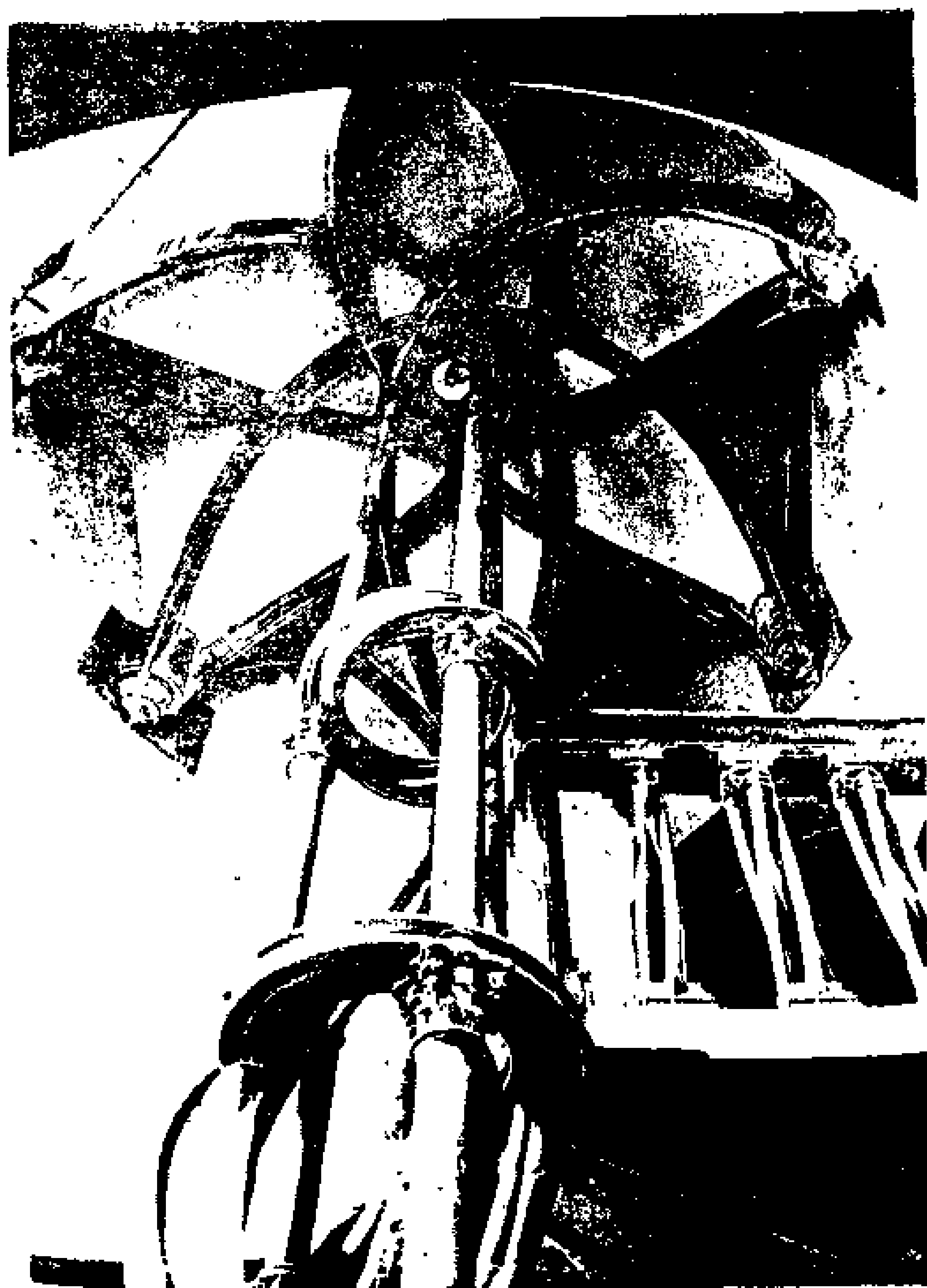


图 10.12.1.2.

10.12.3 这些圆具有一些很强的关于交角的性质. 首先，它们是环面的螺旋线，也就是说所有的子午线都截 $C(t)$ (或 $\Gamma(\theta)$) 成定角 α (对 C 或 Γ 是同一个角). 更重要的是两个不同的 $C(t)$ 及 $C(t')$ (对 $\Gamma(\theta)$ 及 $\Gamma(\theta')$ 也有同样性质) 构成角 α 的挠平行环,

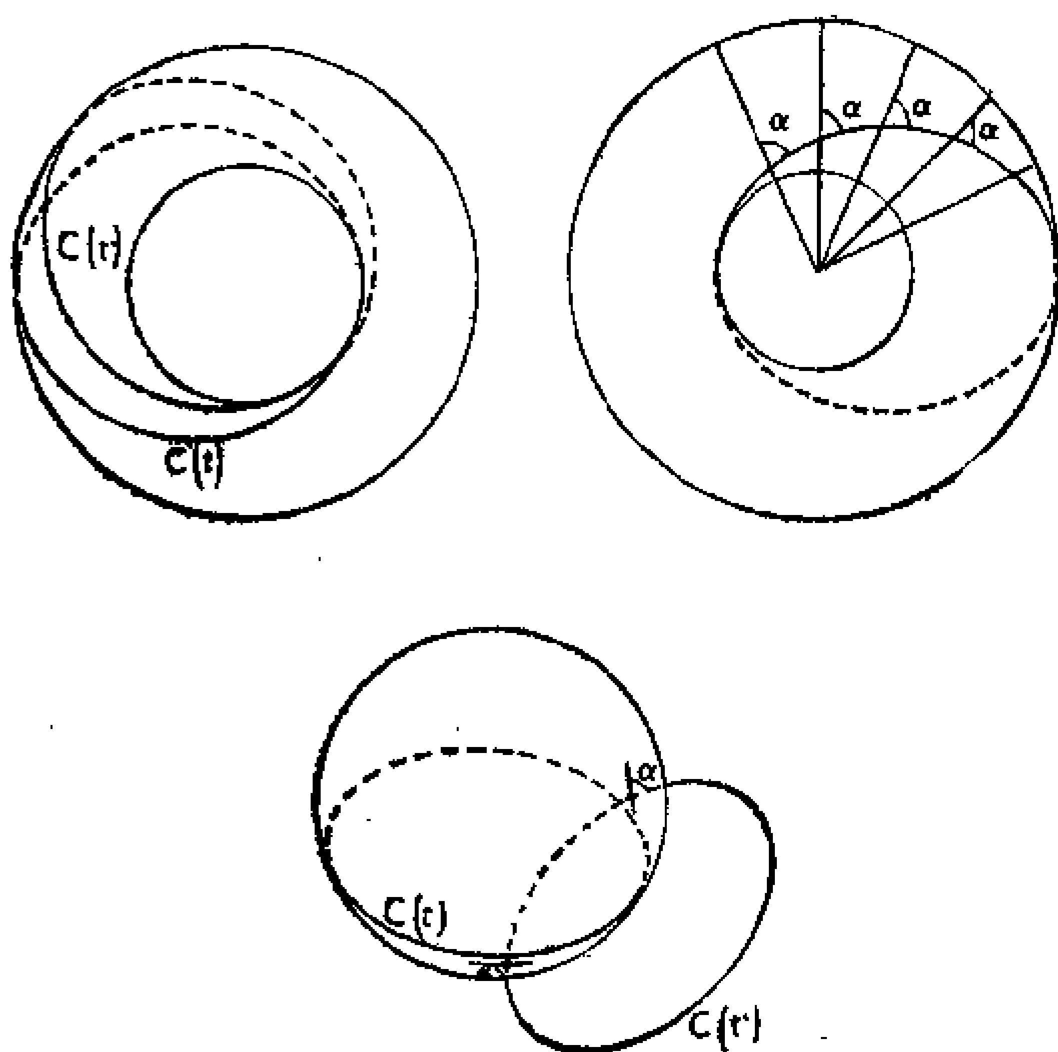


图 10.12.2.

也就是说所有含 $C(t)$ 的球面截 $C(t')$ 成 α 角，同样，所有含 $C(t')$ 的球面截 $C(t)$ 成同一 α 角，而且这个角就是 $C(t)$ 和 $C(t')$ 作为螺旋线的角.（我们把圆与球面的交角定义为在交点处的切线与切面所成的角.）

10.13 练　　习

10.13.1 三角形的高共点.

10.13.1.1 请证明对欧氏平面的任意四点 $\{x, y, z, t\}$ 总有 $(\overrightarrow{xy}|\overrightarrow{zt})+(\overrightarrow{xz}|\overrightarrow{ty})+(\overrightarrow{xt}|\overrightarrow{yz})=0$。由此导出高的共点性.

10.13.1.2 利用 16.5.4 的循环点导出共点性.

10.13.1.3 从 2.8.1 导出共点性.

10.13.2 对公式汇集的补充．对一个三角形证明以下关系式：

$$S^2 = rr_ar_br_c,\quad 4R = r_a + r_b + r_c - r,$$

$$\frac{1}{2Rr} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c},$$

$$p^2 = r_ar_b + r_br_c + r_cr_a,$$

$$2R = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

10.13.3 圆的 Poncelet 大定理：$n=3$ 及 4 的情形． 请证明三角形 $\mathscr{C}$ 的外接圆 C 的半径 R、内切圆 Γ 的半径 r 以及它们中心间的距离 d 满足关系式 $R^2-2Rr=d^2$．再证明其逆，即若有两个半径为 R 及 r 的圆 C，Γ，它们的中心距是 d，且满足 $R^2-2Rr=d^2$，则对任意的 $x\in C$ 必存在以 x 为顶点的三角形 $\mathscr{C}$，它内接于 C 且外切于 Γ．由此就可导出三角形情形下的圆的Poncelet大定理（参见 10.10.4）．对于同时内接于 C 又外切于 P 的四边形，请作类似的研究．

10.13.4 Morley 定理． 首先假设定理为真．试证（见图）三角

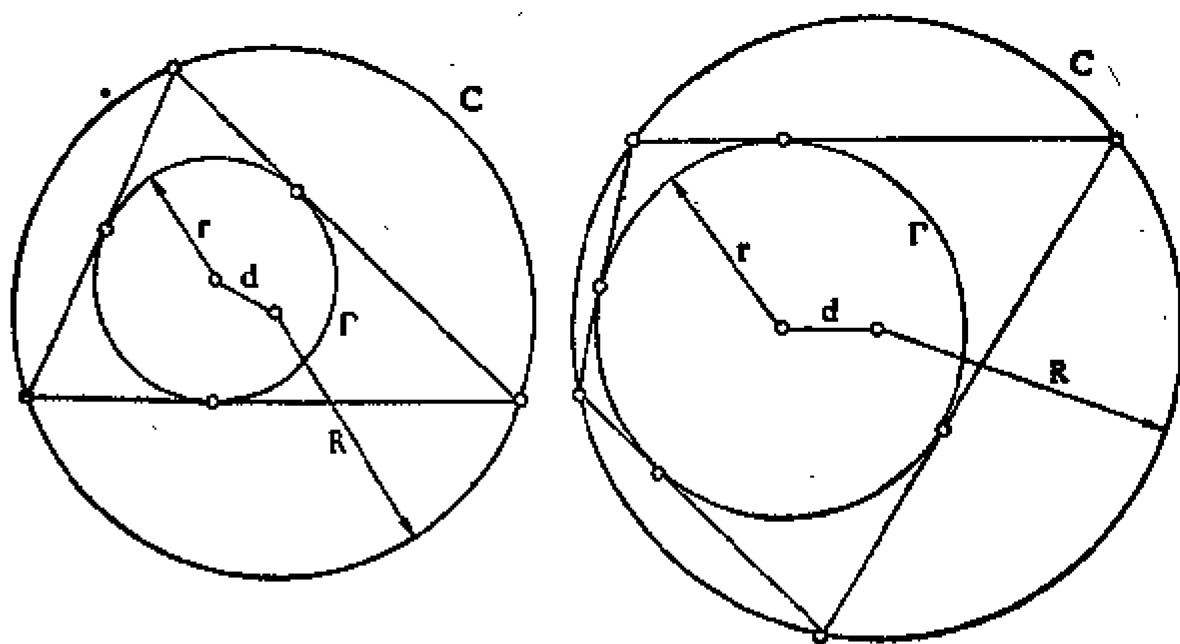


图 10.13.3.

形 $\{u, r, q\}$，$\{v, r, p\}$ 及 $\{w, p, q\}$ 是等腰三角形。并用三角形 $\{x, y, z\}$ 的角表示出上述三个三角形的角，由此可得到 Morley 定理的一个证明，方法如下：从一个等边三角形 $\{r, p, q\}$ 出发，取适当的角作出 u, v, w，然后得到 x, y, z。再注意到这样作出的三角形相似于原三角形。

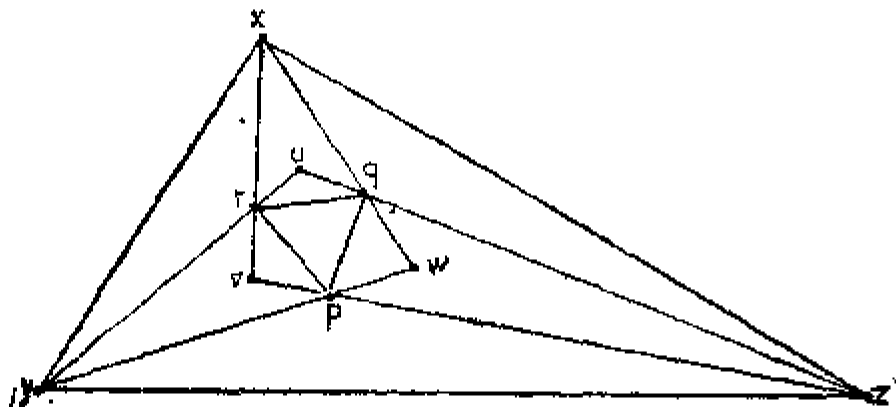


图 10.13.4.

10.13.5 试证对平面上任意一点 t 以及三角形 $\mathscr{C}=\{x, y, z\}$，总有 $tx+ty+tz \geqslant 2\sqrt{\sqrt{3}\,S}$。仅当等边三角形时才有等号成立。由此导出不等式 $tx+ty+tz \geqslant 6r$。

10.13.6 对 10.4.5.4 作完整的讨论。

10.13.7 对一个圆的内接四边形，用它的四条边 a, b, c, d 表示出对角线的长 x, y。证明此四边形的面积为

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

其中

$$p=\frac{a+b+c+d}{2}.$$

10.13.8 先对凸四边形，再对椭圆的内接六边形（参见 16.2.13）研究与 10.4.3 类似的问题。

10.13.9 计算正四面体外接球面的半径。

10.13.10 计算四面体的体积，把它用下列参数表出：

(i) 两个面的面积、它们的公共棱的长及这个棱的二面角；

(ii) 四个面的面积，两个相对的二面角及这两个二面角的棱

长；

(iii) 一个面的面积及三个相邻的二面角.

10.13.11 证明如果四面体的四个面有相等的面积，那么这四个面是全等三角形.

10.13.12 在一个四面体内把对棱间的距离记为 α, β, γ (见 9.2.5)，把顶点到对面的距离记为 $h_i (i=1, 2, 3, 4)$，则

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\sum_i \frac{1}{h_i^2}.$$

10.13.13 在一个四面体内，两个相对的二面角的正弦之积与这两个二面角的棱长之积成比例.

10.13.14 **Salmon 定律.** 在欧氏平面内，已知以 a 为中心的圆 C，又给出了两个点 x, y 及它们关于 C 的极线 D_x, D_y. 试证

$$\frac{ax}{ay}=\frac{d(x, D_y)}{d(y, D_x)}.$$

又证若 P 是 C 的内接 $2n$ 边形，则对 C 的任一个点 z，从 z 到 P 的偶数边的距离之积等于从 z 到 P 的奇数边的距离之积. 证明如果 P 是 C 的外切多边形，则从偶数顶点到圆的一条切线的距离之积与从奇数顶点到同一条切线的距离之积的比值是常数(由假设，多边形 P 总有偶数条边).

10.13.15 已知欧氏平面的两个不同点 a, b, α 是一个角，它可以是直线的交角或半直线的交角，也可以是直线的定向角或半直线的定向角. 请研究以下集合:

$$\{x : \widehat{\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}}=\alpha\}, \quad \{x : \overline{\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}}=\alpha\},$$

$$\{x : \widehat{xa, xb}=\alpha\}, \quad \{x : \overline{xa, xb}=\alpha\}.$$

10.13.16 **像直线.** 设 $\mathscr{C}$ 是一个三角形. 试证直线 D 关于 $\mathscr{C}$ 的三条边的对称像共点的充要条件是它通过 $\mathscr{C}$ 的垂心. 当直线 D 绕垂心旋转时，这个交点如何变化(也请参看 17.6.2.2)?

10.13.17 利用交比(见 9.6.5.2) 给出 10.9.7.2 的代数证明.

10.13.18 **支轴.** 已知平面内的一个三角形 $\{x, y, z\}$. 证明若

p, q, r 是三角形边上的三点，π 是平面上的点，则当 $\{x, r, \pi, q\}$ 和 $\{y, p, \pi, r\}$ 共圆时，$\{z, q, \pi, p\}$ 也共圆。现在固定支轴 π，使 p, q, r 在边上移动，同时又保持上述的共圆性质。试证 $\{p, q, r\}$ 仍正向相似于自身，从而推导出：与 $\{p, q, r\}$ 正向相似关连的点画出一条直线（例如：垂心，内切圆圆心，外接圆圆心等），而且与 $\{p, q, r\}$ 正向相似关连的直线包络出以 π 为焦点的抛物线（参看 9.6.7）。

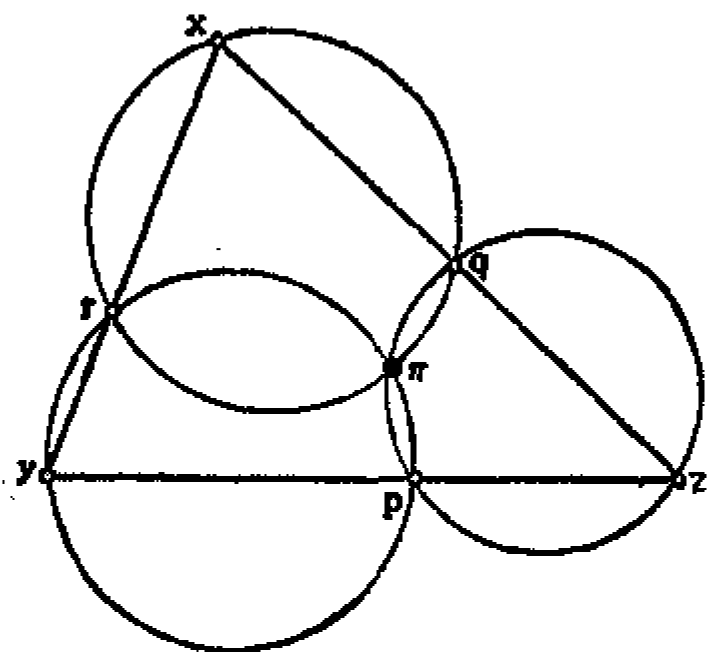


图 10.13.18.

10.13.19 定理链. 在这个练习里我们假设所遇到的对象"处于一般位置"。设 $(D_i)_{i=1,2,3,4}$ 是欧氏平面的四条直线，C_i 是由三条直线 $D_j(j \neq i)$ 构成的三角形的外接圆。试证四个圆 C_i 有一个公共点（也请参看 17.4.3.5 的一个解释）。作图。设 $(D_i)_{i=1,\cdots,5}$ 是欧氏平面的五条直线，p_i 是上述定理中得到的与四条直线 $D_j(j \neq i)$ 相伴的点。证明五个点共圆。作图。

请叙述并证明一个定理链，其开头的两条定理就是上述的两个定理。关于定理链请参看［PE］第 431 页，练习 9.4.7 及［CR1］第 258 页。

10.13.20 等角圆. 称圆 Γ 为两个圆 C, C' 的等角圆，只要它与这两个圆交成等角。试证两个相交圆的等角圆正交于一个定圆或

一条定直线. 研究两圆不相交的情形. 当 Γ 与 C, C' 的交角之和等于 π 时，研究同样的问题. 再研究与三个或四个定圆成等角的圆. 能否把刚才得到的结果用于问题 10.11.1? 请参见 20.4.4 对这个问题的代数研究.

10.13.21 设 C, C' 是与 10.10.3 同样的圆. 它们的半径是 R, R', 中心是 a, a', 且 $aa'=d$. 证明若 C, C' 具有图 10.10.3 所示的 n 个圆的链, 则

$$(R-r)^2-d^2=4Rr\operatorname{tg}^2(\pi/n).$$

10.13.22 证明图 10.12.1.3 中与环面切于两点的平面确实把环面切出两个圆, 并且这两个圆是环面的螺旋线.

10.13.23 运用 10.3.10 的技巧证明三角形的内外角的三等分线的交点分布在 27 条直线上. 关于这一主题, 请参看 9.14.34.5 以及 [LB1] 第 173—208 页.

10.13.24 已知平面上一个三角形, 试找出使三角形自配极的圆, 即它的顶点关于这个圆两两共轭. 在三维空间研究同样的问题.

10.13.25 设三个圆的半径是 a, b, c, 而且两两相切, 令 $\alpha=a^{-1}$, $\beta=b^{-1}$, $\gamma=c^{-1}$. 试证与这三个圆相切的两个圆的半径是:

$$[\alpha+\beta+\gamma+2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^{1/2}]^{-1}$$

及

$$|\alpha+\beta+\gamma-2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^{1/2}|^{-1}.$$

$\alpha+\beta+\gamma-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^{1/2}$ 的符号有什么意义?

10.13.26 设欧氏平面的三角形 $\mathscr{C}$ 的边长是 a, b, c, 对于任意一个整数 n, 考虑关于 $\mathscr{C}$ 的重心坐标为

$$\left(\frac{a^n}{a^n+b^n+c^n},\ \frac{b^n}{a^n+b^n+c^n},\ \frac{c^n}{a^n+b^n+c^n}\right)$$

的点 $X(n)$. 用几何方法刻划 $X(0)$, $X(1)$, $X(2)$ 的特征. 当 n 趋向 $+\infty$ (或 $-\infty$)时 $X(n)$ 变成什么?

10.13.27 **又回到 Simson 直线!** 设 D, D' 是欧氏平面的不同直线, $a=D\cap D'$, 另有一点 $x\notin D\cup D'$. 设过 a 及 x 的圆交 D, D' 于 m, m', 则映射 $D\ni m\longmapsto m'\in D'$ 是以 x 为中心的相似变换在 D 上的限制. x 在直线 mm' 上的正交射影点 h 描出怎样的

直线？从这个结果推导出 Simson 直线的定理 10.9.7.1。

10.13.28 已知欧氏平面的四个点 a，b，c，d，求作正方形 $ABCD$ 使 $a\in AB$，$b\in BC$，$c\in CD$，$d\in DA$。

一般，已知平面上两个四边形 Q，Q'，求作四边形 Q'' 使它相似于 Q 且内接于 Q'。然后使它外接于 Q'。

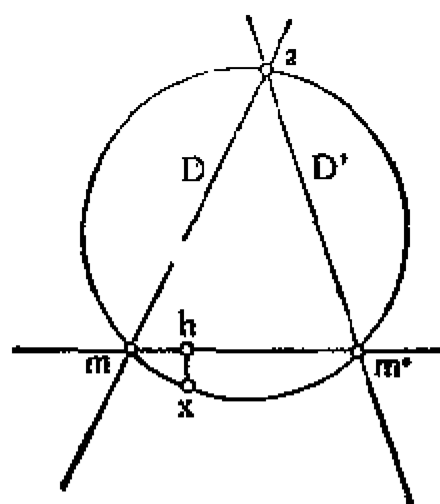


图 10.13.27.

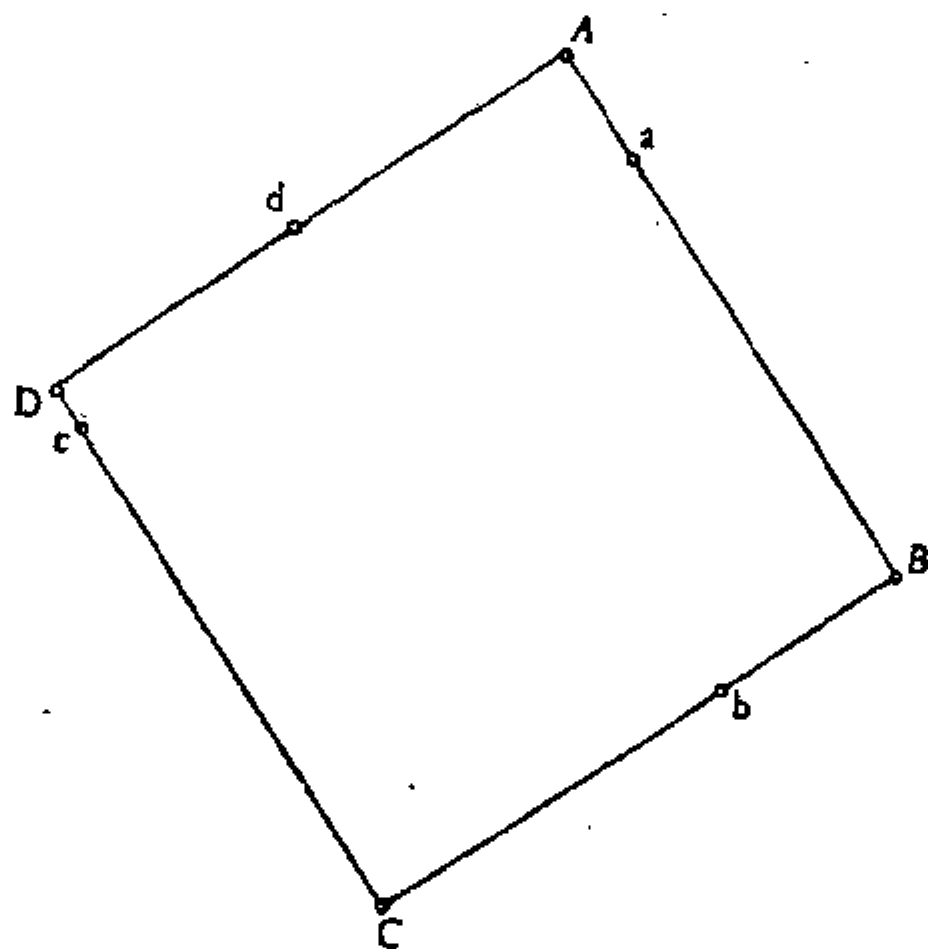


图 10.13.28.

10.13.29 Ford 圆. 如图 10.13.29.1 所示，考虑三个两两相切并与直线D相切的圆。如果 r，s 是 γ，δ 的半径，ρ 是小圆的半径，设 a，b，x 是它们与D的交点，将 ρ，$\overline{ax}$，$\overline{bx}$ 表示成 $\overline{ab}$，r，s的函数。

取一个标准正交标架，从方程为 $x^2+y^2-y=0$ 与 $x^2+y^2-2x-y+1=0$ 的两个圆出发，可按图 10.13.29.2 所示的方式递推地作出一系列圆. 证明这些圆与 x 轴的切点的横坐标是有理数. 这样能否得到 $[0, 1]$ 内的一切有理数？

通过沿着这些圆周作复数积分，可使这些 Ford 圆在数论中得到有趣的应用。请参看 [RA] 第 267 页.

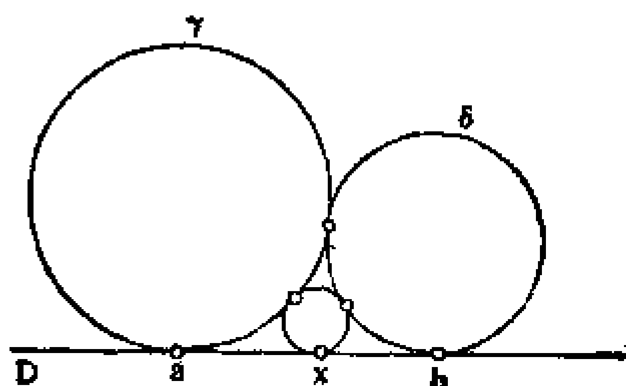


图 10.13.29.1.

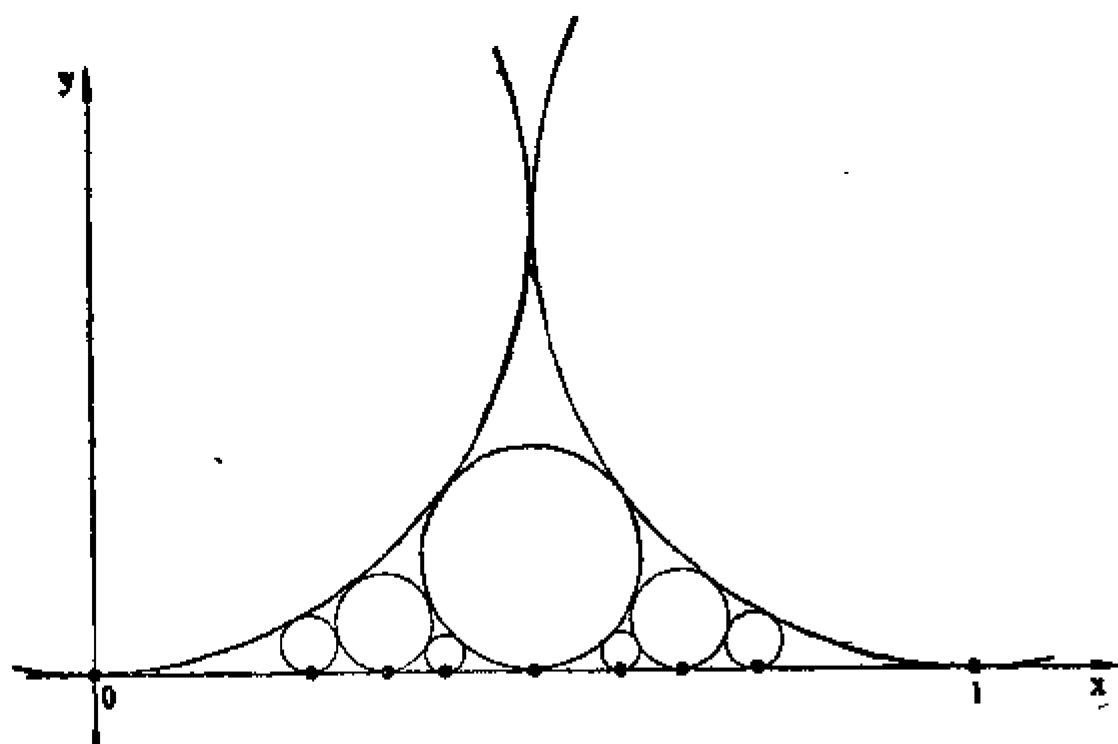


图 10.13.29.2.

参考书目

[A-A] ARNOLD (V. I.) et AVEZ (A.). *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars.

[A-B] ANNEQUIN et BOUTIGNY. *Cours de Physique. Optique*. Vuibert.

[A-B-S] ATIYAH (M. F.), BOTT (R.) et SHAPIRO (A.). *Clifford Modules*, Topology, 3, 1964-1965, supplément, p. 3-38.

[AE] *Astronomie*, Encyclopédie de la Pléïade, Gallimard

[AN] ARTIN (Emil). *Geometric Algebra*, Interscience.

[AR] ARNOLD (V.). *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou.

[AS] ARNAUDIÈS (J.-M.), *Les cinq polyèdres de* $\mathbf{R}^3$ *et leurs groupes*, C.D.U.-S.E.D.E.S., Paris.

[AV] ALEXANDROW (A. D.). *Konvexe Polyeder*, Akademie Verlag, Berlin.

[AW] ALEXANDROW (A.D.). *Die innere Geometrie der konvexe Fläche*, Akademie Verlag, Berlin.

[BA] BIANCHI (L.). *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle transformazioni asintotiche delle curve el delle superficie*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 25, 1908. p. 291-325.

[BAN] BANCHOFF (Thomas). *Non-rigidity Theorems for Tight Polyhedra*, Archiv der Mathematik, 21, 1970, p. 416-423.

[BA-WH] BANCHOFF (Thomas) et WHITE (James). *The behavior of the total twist and self-linking number of a closed space curve under inversions*. Mathematica Scandinavica 36, 1975, p. 254-262.

[B-B] BECKENBACH (Edwin F.) et BELLMAN (Richard). *Inequalities*, Springer.

[BE] BROUSSE (Pierre). *Mécanique*. Armand Colin.

[BER] BERGER (M.). *Lectures Notes on Geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Institute. Bombay.

[BES] BESSE (Arthur). *Manifolds all of whose geodesics are closed*. Ergebnisse der Mathematik. Band 93. Springer.

[B-F] BONNESEN (O.) et FENCHEL (W.). *Theorie der konvexe Körper*. Chelsea.

[B-G] BERGER (Marcel) et GOSTIAUX (Bernard). *Géométrie différentielle*, Armand Colin.

[B-H] BOREL (A.) et HIRZEBRUCH (F.). *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces*, American Journal of Math., 80, 1958, p. 458-538.

[B-H-H] BLACK (W. L.), HOWLAND (H. C.) et HOWLAND (B.). *A Theorem about Zigzags between two Circles*, American Math. Monthly, 81, 1974, p. 754-757.

[BI 0] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*. Théorie des Ensembles, Hermann, 1970.

[BI 1] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Topologie Générale, chapitres 5 à 10, Hermann, 1974.

[BI 2] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre II, chapitre 9, Hermann.

[BI 3] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, livre V, chapitres 1, 2, 2e édition, Hermann.

[BI 4] BOURBAKI (Nicolas). *Groupes et algèbre de Lie*, chapitre 4, 5, 6, Hermann.

[BI 5] BOURBAKI (Nicolas). *Eléments de mathématiques*, Algèbre, chapitres 1 à 3, Hermann, 1970.

[B-K] BUSEMANN (Herbert) et KELLY (Paul J.). *Projective Geometry and Projective Metrics*, Academic Press.

[BL] BLUMENTHAL (Leonard M.). *Theory and Applications of Distance Geometry*, Chelsea.

[BLA 1] BLASCHKE (Wilhelm). *Kreis und Kugel*, Chelsea.

[BLA 2] BLASCHKE (Wilhem). *Vorlesungen über Differential Geometrie, II : Affine Differential Geometry*, Springer.

[BLA 3] BLASCHKE (Wilhelm). *Vorlesungen über Differential Geometrie, III : Differential Geometrie der Kreise und Kugel*, Springer.

[BL-BO] BLASCHKE (W.) et BOL (G.). *Geometrie der Gewebe*, Springer, 1938.

[B-M] BLUMENTHAL (Leonard M.) et MENGER (Karl). *Studies in Geometry*, W. H. Freeman.

[BN] BOURGIN (D. G.). *Modern Algebraic Topology*, Mac Millan.

[BO 1] BOREL (Armand). *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes*, American Journal of Math., 76, 1954, p. 273-342.

[BO 2] BOREL (Armand). *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Annals of Math., 57, 1953, p. 115-207.

[BP] BAUDOIN (Paul). *Les ovales de Descartes et le limaçon de Pascal*, Vuibert.

[BR] BAER (R.). *Linear Algebra and Projective Geometry*, Academic Press.

[B-S] BOREVICH (Z. I.) et SHAFAREVICH (I. R.). *Number Theory*, Academic Press.

[B-T] BRUHAT (F.) et TITS (J.). *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées*, Public. Math. I.H.E.S., nº 41.

[BU 1] BUSEMANN (Herbert). *Convex Surfaces*, Interscience.

[BU 2] BUSEMANN (Herbert). *Recent Synthetic Differential Geometry*, Ergebnisse der Mathematik, nº 54, Springer.

[BUR] BURCKHARDT (J. J.). *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*, Birkhaüser.

[BV] BONNEVAL (H.). *Photogrammétrie générale (4 volumes)*, Eyrolles.

[BZ] BENZ (Walter). *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer.

[CA] CAIRNS (Stewart Scott). *Introductory Topology*, Ronald Press.

[CAL] CALLAHAN (Francis P.). *Morley polygons*, American Math. Monthly 84, 1977, p. 325-337.

[C-B] COUDERC (P.) et BALLICIONI (A.). *Premier livre du tétraèdre*. Gauthier-Villars.

[CD] CARATHEODORY (C.). *The most general transformation which transform circles into circles*, Bull. Amer. Math. Soc., 43, 1937, p. 573-579.

[C-D-L] COHEN-TANNOUDJI (C.), DIU (B.) et LALOE (F.). *Mécanique quantique*, *vol.* 1, Hermann.

[CE 1] CARTAN (Elie). *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes*. Oeuvres complètes, tome I, volume 2, p. 1227-1246.

[CE 2] CARTAN (Elie). *The Theory of Spinors*, Hermann ou The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

[C-G] CHEEGER (Jeff) et GROMOLL (Detlef). *On the Structure of Complete Manifolds of Nonnegative Curvature*, Ann. of Math., 96, 1972, p. 413-443.

[CH 1] CARTAN (Henri). *Calcul différentiel*, Hermann.

[CH 2] CARTAN (Henri). *Théorie élémentaire des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.

[CH-GR] CHERN (S. S.) et GRIFFITHS (P.). *Abel's theorem and webs*, Jahrbericht d. Deutsche Math.-Verein., 80, 1978, p. 13-110.

[CL 1] CONNELLY (Robert). *A counter-example to the rigidity conjecture for polyhedra*. Public. Math. I.H.E.S., 47, 1978, p. 333-338.

[CL 2] CONNELLY (Robert). *A flexible sphere*, Math. Intelligencer, 1, 1978, p. 130-131.

[C-M] COXETER (H. S. M.) et MOSER (W. O. J.). *Generators and Relations for Discrete Groups*, 2e édition, Springer.

[CN] CUENIN (R.). *Cartographie générale* (2 *volumes*), Eyrolles.

[CO] CONNELLY (Robert). *An attack on rigidity I, II*. Preprints. Cornell University.

[CR 1] COXETER (H. S. M.). *Introduction to Geometry*. John Wiley.

[CR 2] COXETER (H. S. M.). *Regular Polytopes*, Methuen.

[CR 3] COXETER (H. S. M.). *Non-euclidean Geometry*. The University of Toronto Press.

[CR 4] COXETER (H. S. M.). *Regular Complex Polytopes.* Cambridge University Press.

[CR 5] COXETER (H. S. M.). *The Problem of Apollonius.* American Math. Monthly, 75, 1968, p. 5-15.

[CS] CASSELS (J. W. S.). *An Introduction to the Geometry of Numbers.* Springer.

[CT] CHOQUET (Gustave). *Cours d'Analyse, tome II : Topologie.* Masson.

[CY] CHEVALLEY (Claude). *Theory of Lie Groups.* Princeton University Press.

[CZ] CONZE (Jean-Pierre). *Le théorème d'isomorphisme d'Ornstein et la classification des systèmes dynamiques en théorie ergodique.* Séminaire Bourbaki, novembre 1972.

[D-C 1] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Géométrie.* J. B. Baillière.

[D-C 2] DELTHEIL (Robert) et CAIRE (Daniel). *Compléments de géométrie.* J. B. Baillière.

[DE 1] DIEUDONNÉ (Jean). *La géométrie des groupes classiques. 2e édition.* Springer.

[DE 2] DIEUDONNÉ (Jean). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire. 3e édition,* Hermann.

[DE 3] DIEUDONNÉ (Jean). *Calcul infinitésimal.* Hermann.

[DE 4] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome II.* Gauthier-Villars.

[DE 5] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome III.* Gauthier-Villars.

[DE 6] DIEUDONNÉ (Jean). *Eléments d'Analyse, tome IV.* Gauthier-Villars.

[DE 7] DIEUDONNÉ (Jean). *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press.

[DE 8] DIEUDONNÉ (Jean). *Cours de Géométrie Algébrique (tomes 1 et 2).* Presses Universitaires de France.

[D-G-K] DANZER (L.), GRÜNBAUM (B.) et KLEE (V.). *Helly's Theorem and its Relatives.* A.M.S. Symposium on Convexity, Proc. Symp. Pure Math., volume 7, 1963.

[DI] DEMBOWSKI (P.). *Finite Geometries.* Ergebnisse der Mathematik, nº 44, Springer.

[DI-CA] DIEUDONNÉ (Jean) et CARRELL (James B.). *Invariant Theory, Old and New.* Academic Press.

[DN] DANJON (André). *Astronomie générale.* J. et R. Sennac.

[DO] DORRIE (Heinrich). 100 *Great Problems of Elementary Mathematics.* Dover.

[DQ] DUPORCQ (Ernest). *Premiers principes de géométrie moderne. 3e édition.* Gauthier-Villars.

[DR] DIXMIER (Jacques). *Cours de mathematiques du premier cycle, deuxième année*, Gauthier-Villars.

[DV] DVORETSKY (Aryeh). *Some results on convex bodies and Banach spaces*, p. 123-160 dans Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, Jerusalem, 1961.

[DX] DARBOUX (Gaston). *Principes de Géométrie Analytique*, Gauthier-Villars.

[DY] DOUADY (Adrien). *Le shaddock à six becs*. Bulletin A.P.M.E.P., 281, 1971, p. 699.

[EE] *Encyklopädie der Mathematischen Wissenchaften, Geometrie*, III.2.1, Teubner.

[E-K] EELLS (James) et KUIPER (Nicolas O.). *Manifolds which are like Projective Planes*. Public. Math. I.H.E.S., n° 14, p. 5-46.

[EL] ELLISON (W. J.). *Waring's problem*, American Math. Monthly, 78, 1971.

[EN] EGGLESTON (H. G.). *Convexity*, Cambridge University Press.

[ER] ESCHER (M. C.). *L'œuvre graphique*, Solin, Paris.

[E-S] EELLS (J.) et SAMPSON (J. H.). *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds*, American Journal of Math., 86, 1964, p. 109-160.

[FA] FALCONER (K. J.). *A characterisation of plane curves of constant width*. J. London Math. Soc., 16, 1977, p. 536-538.

[FI] FILLMORE (Jay P.). *Symmetries of surfaces of constant width*, J. of Diff. Geometry, 3, 1969, p. 103-110.

[FL] FRENKEL (Jean). *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann.

[FN] FULTON (William). *Algebraic Curves*, Benjamin.

[FR] FEDERER (Herbert). *Geometric Measure Theory*, Springer.

[FT 1] FEJES-TOTH (L.). *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*. Springer.

[FT 2] FEJES-TOTH (L.). *Regular Figures*, Pergamon.

[GA] OARDNER (Martin). *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*. Scientific American, January 1977.

[GE] GONSETH (F.). *Un théorème relatif à deux ellipsoides confocaux*. Bulletin des Sciences Math., 42, 1918, p. 177-180 et 193-194.

[GG] GREENBERG (Marvin J.). *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin.

[G-G-V] GELFAND (I. M.), GRAEV (M. I.) et VILENKIN (N. Ya). *Generalized Functions, volume 5, Integral Geometry and Representation Theory*, Academic Press.

[GIS] GRIFFITHS (Phillip A.). *Variations on a Theorem of Abel*. Inventiones Math., 35, 1976, p. 321-390.

[GI-WE] GIBBONS (J. C.) et WEBB (C.). *Circle preserving maps of spheres*. preprint, Illinois Institute of Technology, Chicago.

[GK] *Grundzüge der Mathematik, Band IV : Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik*, Vandenhoeck and Ruprecht.

[G-K-M] GROMOLL (D.), KLINGENBERG (W.) et MEYER (W.). *Riemannsche Geometrie im Grossen. Lecture Notes in Mathematics*, n° 55. Springer.

[GL] GLUCK (Herman). *Almost All Simply Connected Closed Surfaces are Rigid*, preprint, University of Pennsylvania.

[GM] GRAMAIN (André). *Topologie des surfaces*. Presses Universitaires de France.

[GN] GÉRARDIN (Paul). *Mathématiques Elémentaires Approfondies*, cours polycopié, Université Paris VII, U.E.R. de Mathématiques.

[G-O] GELBAUM (Bernard D.) et OLMSTED (John M. H.). *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day.

[GR] GUGGENHEIMER (Heinrich W.). *Plane Geometry and its Groups*. Holden-Day.

[GR-HA] GRIFFITHS (P.) et HARRIS (S.). *On Cayley's Explicit Solution to Poncelet's Porism*, L'Enseignement Mathématique, 24, 1978, p. 31-40.

[GR-SH1] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The eighty-one types of isohedral tilings in the plane*. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 82, 1977, p. 177-196.

[GR-SH2] GRÜNBAUM (B.) et SHEPHARD (G. C.). *The 91 types of isogonal tiling in the plane*, Trans. A.M.S., 242, 1978, p. 335-354.

[GS] *Geometric Inequalities* (BOTTEMA *et alia*). Wolters-Noordhoof.

[GT] GUICHARDET (A.). *Calcul intégral*. Armand Colin.

[GX] GODEAUX (Lucien). *Les géométries*. Armand Colin.

[HA] HALL (M.). *The Theory of Groups*. Mac Millan.

[HA-WR] HARDY (G. H.) et WRIGHT (E. M.). *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press.

[H-C] HILBERT (D.) et COHN-VOSSEN (S.). *Geometry and the Imagination*, Chelsea.

[HD 1] HADAMARD (Jacques). *Lecons de géométrie élémentaire, tome I*. 10e *édition*. Armand Colin.

[HD 2] HADAMARD (Jacques). *Leçons de géométrie élémentaire, tome II*, 7e *édition*. Armand Colin.

[H-K] HAUPT (O.) et KÜNNETH (H.). *Geometrische Ordnungen*, Springer.

[H-L-P] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) et POLYA (G.). *Inequalities*, Cambridge University Press.

[HM] HARTMAN (P.). *On Isometries and a Theorem of Liouville*, Mathematische Zeitschrift, 69, 1958, p. 202-210.

[HN] HELGASON (Sigurdur). *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Academic Press.

[HOL] d'HOLLANDER (Raymond). *Topologie Générale, tome I : Généralités, Mesure des angles et des distances*, Eyrolles.

[HO-PE] HODGE (W. V. D.) et PEDOE (D.). *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge University Press.

[H-P] HUGHES (Daniel R.) et PIPER (Fred C.). *Projective Planes*, Springer.

[HR] HADWIGER (H.). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer.

[HS] HERSCH (Joseph). *Quatre propriétés des membranes sphériques homogènes*. C.R.A.S., 270, 1970, p. 1714-1716.

[HU] HUSEMOLLER (Dale). *Fibre Bundles*, McGraw Hill.

[H-W] HILTON (P. J.) et WYLIE (S.). *Homology Theory*, Cambridge University Press.

[H-Y] HOCKING (John G.) et YOUNG (Gail S.). *Topology*, Addison-Wesley.

[HZ] HURWITZ (M. A.). *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales Ecole Norm., 19, 1902, p. 357-408.

[I-R] ILLIOVICI (G.) et ROBERT (P.). *Géométrie*, Eyrolles.

[JE] JOEDICKE (Jürgen). *Les structures en voiles et coques*, Vincent, Fréal et Cie.

[KE] KRÉE (P.). *Introduction aux mathématiques et à leurs applications fondamentales, M.P. 2*, Dunod.

[KF] KAZARINOFF (Nicholas D.). *Geometric Inequalities*, Random House.

[KG 1] KLINGENBERG (Wilhelm). *Eine Vorlesung über Differential Geometrie*. Springer.

[KG 2] KLINGENBERG (Wilhelm). *Paare symmetrischen und alternierenden Formen zweiten Grades*, Abhandl. Math. Sem. Hamburg. 19, 1955, p. 78-93.

[KH] KUROSH (A. G.). *Lectures in General Algebra*, Pergamon.

[KM] KLOTZ-MILNOR (Tilla). *Efimov's Theorem about Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature*, Advances in Math., 8, 1972, p. 474-543.

[KN 1] KLEIN (Félix). *Lectures on the Icosahedron*, Dover.

[KN 2] KLEIN (Félix). *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Springer.

[KO-NO 1] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume I*, Interscience.

[KO-NO 2] KOBAYASHI (Shoshichi) et NOMIZU (Katsumi). *Foundations of Differential Geometry, volume II*. Interscience.

[LB 1] LEBESGUE (Henri). *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars.

[LB 2] LEBESGUE (Henri). *Les coniques*. Gauthier-Villars.

[LB 3] LEBESGUE (Henri). *Octaèdres articulés de Bricard.* l'Enseignement mathématique, 13, 1967, p. 175-185.

[LE] LEKERKERKER (C. G.). *Geometry of numbers.* Walters-Noordhoff.

[LF 1] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Géométrie différentielle.* Masson.

[LF 2] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes.* Mémoires Acad. Royale Belg., Cl. Sci. Mém. Coll. in-8°, 1971, fascicule 5.

[LF 3] LELONG-FERRAND (Jacqueline). *Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes.* J. of Diff. Geometry, 8, 1973, p. 487-510.

[LF-AR] LELONG-FERRAND (J.) et ARNAUDIÈS (J.-M.). *Cours de mathématiques, tome* 3, Dunod.

[LG 1] LANG (Serge). *Elliptic Functions*, Addison-Wesley.

[LG 2] LANG (Serge). *Analysis II*, Addison-Wesley.

[LM 1] LEMAIRE (J.). *Hypocycloïdes et Epicycloïdes.* Vuibert.

[LM 2] LEMAIRE (J.). *L'hyperbole équilatère.* Vuibert.

[LP] *Le libre du problème, volume* 4 : *la convexité.* CEDIC.

[LR 1] LEHNER (Joseph). *A Short Course in Automorphic Functions.* Holt, Rinehart and Winston.

[LR 2] LEHNER (Joseph). *Discontinuous Groups and Automorphic Functions.* Math. Surveys, number VIII, American Math. Society.

[LS] LEVALLOIS (Jean-Jacques). *Géodésie Générale, tome II : Géodésie classique bidimensionnelle*, Eyrolles.

[LU] LUSTERNIK (Lazar A.). *Convex Figures and Polyhedra.* Heath.

[LY] LEVY (Harry). *Projective and Related Geometry.* Mac Millan.

[LZ] LAZUTKIN (V. F.). *The Existence of Caustics for a Billiard Problem in a Convex Domain.* Math. USSR Izvestia. 7, 1973, p. 185-214.

[MA] MALLIAVIN (Paul). *Géométrie différentielle intrinsèque.* Hermann.

[MD] MARCHAUD (A.). *Les surfaces du second ordre en géométrie finie.* J. Math. pures et appl., 9-15, 1936, p. 293-300.

[MI] MILNOR (John). *A problem in cartography.* American Math. Monthly, 76, 1969, p. 1101-1102.

[MJ] MANDELBROJT (Benoit). *Les Objets fractals.* Flammarion.

[ML] MICHEL (Charles). *Compléments de géométrie moderne.* Vuibert.

[M-P] MODENOV (P. S.) et PARKHOMENKO (A. S.). *Geometric Transformations, volume I*, Academic Press.

[MR] MATHER (J.). *The nice dimensions. Proceedings of Liverpool Singularities. Symposium I.* Lecture Notes in Mathematics n° 192. Springer.

[M-T] MARTINEAU (André) et TREVES (François). *Eléments de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des distributions. fascicule I.* C.D.U.

[MW 1] MOSTOW (G. D.). *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces.* Annals of Mathematical Studies, nº 78, Princeton University Press.

[MW 2] MOSTOW (G. D.). *Discrete Subgroups of Lie Groups,* Advances in Mathematics, 15, 1975, p. 112-123.

[NA] NEVANLINNA (Rolf). *On Differentiable Mappings, Analytic Functions,* p. 3-9, Princeton University Press.

[OA] OBATA (M.). *The Conjecture on Conformal Transformations of Riemannian Manifolds,* J. of Differential Geometry, 6, 1972, p. 247-258.

[OM] O'MEARA (O. T.). *Introduction to Quadratic Forms,* Springer.

[OS 1] OSSERMAN (Robert). *Bonnesen-style Isoperimetric Inequalities.* American Math. Monthly, 86, 1979, p. 1-29.

[OS 2] OSSERMAN (Robert). *The isoperimetric inequality,* Bull. Amer. Math. Soc., 84, 1978, p. 1182-1238.

[PA] PALAIS (Richard). *The Classification of G-Spaces.* Memoirs of the A.M.S., nº 36.

[PC] PASCAL (Blaise). *Pensées,* édition Brunschwig.

[PE] PEDOE (D.). *A Course of Geometry,* Cambridge University Press.

[PL] POHL (William F.). *A Theorem of Géométrie finie.* Journal of Differential Geometry, 10, 1975, p. 435-466.

[PN] PAYNE (L. E.). *Isomerimetric Inequalities and their Applications,* SIAM Review, 9, 1967, p. 453-488.

[PO] PORTEOUS (I. R.). *Topological Geometry,* Van Nostrand-Reinhold.

[PR] PORTER (T. I.). *A History of the Classical Isoperimetric Problem. Contributions to the Calculus of Variations.* University of Chicago Press, 1933.

[P-S] POLYA (G.) et SZEGÖ (G.). *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics,* Princeton University Press ou Kraus Reprint Corporation.

[PT] PICKERT (G.). *Projektive Ebenen,* Springer.

[PV 1] POGORELOV (A. V.). *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces.* Israël Programm for Scientific Translation, Jerusalem.

[PV 2] POGORELOV (A. D.). *Complete Solution of Hilbert's Fourth Problem.* Soviet Math. Doklady, 14, 1973, p. 46-49.

[RA] RADEMACHER (Hans). *Topics in Analytic Number Theory.* Grundlehren nº 169, Springer.

[R-C 1] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie. 1re partie.* Gauthier-Villars.

[R-C 2] ROUCHE (Eugène) et de COMBEROUSSE (Charles). *Traité de Géométrie, 2e partie.* Gauthier-Villars.

[RE] ROUSSARIE (Robert). *Sur les feuilletages de variétés de dimension 3*, Annales de l'Institut Fourier, 21(3), 1971, p. 13-81.

[RM] DE RHAM (Georges). *Sur les polygones générateurs des groupes fuchsiens*. l'Enseignement mathématique, 17, 1971, p. 49-61.

[RN 1] ROBINSON (Raphael M.), *Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane*, Inventiones Math., 12, 1971, p. 177-209.

[RN 2] ROBINSON (Raphael M.). *Undecidable Tiling Problems in the Hyperbolic Plane*, Inventiones Math., 44, 1978, p. 259-264.

[RN 3] ROBINSON (Raphael M.). *Comments on the Penrose Tiles*, preprint, University of California, Berkeley.

[RO] ROMANOV (V. G.). *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations*, Springer.

[RS] ROGERS (C. A.). *Packing and Covering*, Cambridge University Press.

[R-V] ROBERTS (A. Wayne) et VARBERG (Dale E.). *Convex Functions*. Academic Press.

[SA] SHIMURA (G.). *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanami Shoten et Princeton University Press.

[SB] STERNBERG (Shlomo). *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall.

[SC 1] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *The plane symmetry groups their recognition and notation*, American Math. Monthly, 85, 1978, p. 439-450.

[SC 2] SCHATTSCHNEIDER (Doris). *Tiling the plane with congruent pentagons*. Mathematics Magazine, 51 (1978), p. 29-44.

[SD 1] STAUDE (Otto). *Fadenconstructionen des Ellipsoides*, Math. Annalen, 20, 1882, p. 147-184.

[SD 2] STAUDE (Otto). *Die Fokaleigenschaften der Flächen Zweiter Ordnung*, Leipzig, 1896.

[SE 1] SERRE (Jean-Pierre). *Corps locaux*. Hermann.

[SE 2] SERRE (Jean-Pierre). *Cours d'arithmétique*. Presses Universitaires de France.

[SE 3] SERRE (Jean-Pierre). *Algèbres de Lie semi-simples complexes*. W. A. Benjamin.

[SE-TH] SEIFERT (H.) et THRELFALL (W.). *Lehrbuch der Topologie*. Chelsea.

[SF 1] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants of a class of transformation groups*. Aequationes Math., 14, 1976, p. 105-110.

[SF 2] SCHWERDTFEGER (Hans). *Invariants à cinq points dans le plan projectif*, C.R.A.S., 285, 1977, p. 127-128.

[SG] SEIDENBERG (A.). *Lectures in Projective Geometry*, Van Nostrand.

[SGR] *Séminaire de Géométrie Riemannienne de l'Université Paris VII*, 1970-1971.

[SK] SPIVAK (Michael). *Differential Geometry, volume II*. Michael Spivak.

[SL 1] SALLEE (G. T.). *Maximal areas of Reuleaux polygons*, Canadian Math. Bull., 13, 1970, p. 175-179.

[SL 2] SALLEE (G. T.). *Reuleaux polytopes*, Mathematika, 17, 1970, p. 315-323.

[SN] STEIN (S. K.). *Tiling Space by Congruent Polyhedra*, Bulletin of the A.M.S., 80, 1974, p. 819-820.

[SO] SANTALO (L. A.). *Introduction to Integral Geometry*, Hermann.

[SR] SPANIER (E.). *Algebraic Topology*, McGraw Hill.

[S-T] SNAPPER (Ernst) et TROYER (Robert J.). *Metric Affine Geometry*, Academic Press.

[STE] STEFFEN (Klaus). *A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices*, preprint, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette.

[ST-RA] STEINITZ (E.) et RADEMACHER (H.). *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Springer.

[SU] SAMUEL (Pierre). *Unique Factorization*, American Math. Monthly, 75, 1968, p. 945-952.

[SW] STEWART (Ian). *Galois Theory*, Chapman and Hall.

[TG] *Seminar on Transformation Groups*, by Armand BOREL, Annals of Mathematical Studies, n° 46, Princeton.

[TM] THOM (René). *Sur la théorie des enveloppes*, J. de Math. pures et appl., 16, 1962, p. 177-192.

[TS] TITS (Jacques). *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Springer Lecture Notes in Mathematics, n° 386.

[VE] VALENTINE (Frederik A.). *Convex Sets*, McGraw Hill.

[VG 1] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1936, p. 229-231.

[VG 2] VODERBERG (H.). *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsch. Math. Ver., 46, 1937, p. 159-160.

[VL] DU VAL (Patrick). *Homographies, Quaternions and Rotations*, Oxford University Press.

[VN] VALIRON (Georges). *Equations fonctionnelles. Applications*, Masson.

[V-Y] VEBLEN (G.) et YOUNG (J. W.). *Projective Geometry*, deux volumes, Ginn and Co.

[WF] WOLF (Joseph A.). *Spaces of Constant Curvature*, J. A. Wolf.

[WK] WALKER (R. J.). *Algebraic Curves*, Dover.

[WL] WEYL (Hermann). *Symmetry*, Princeton University Press.

[WN] WENNINGER (Magnus J.). *Polyhedron Models*, Cambridge University Press.

[WO] WONG (Yung-Chow). *Isoclinic n-Planes in Euclidean 2n-Space, Clifford Parallels in Elliptic (2n − 1)-Space and the Hurwitz Matrix Equations*, Memoirs of the A.M.S., nº 41.

[WR] WARNER (Frank). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott-Foresman.

[Y-B] YAGLOM (I. M.) et BOLTYANSKII (V. G.). *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston.

[ZN] ZISMAN (Michel). *Topologie algébrique élémentaire*, Armand Colin.

[ZR] ZWIKKER (C.). *The advanced Geometry of Plane Curves and their Applications*, Dover.